

不整形な三角形モジュールによる丸太レシプロカル構造の部材加工方法と座標計算に関する検討
(その2) レシプロカル架構の部材座標計算

正会員 〇曾根拓也*
同 石塚裕彬*

レシプロカル Reciprocal 丸太
幾何学 木材 数値解析

1.はじめに

本報(その1)で示した、不整形な三角形モジュールのレシプロカル架構の部材座標の計算方法を示し、2つの計算例を掲載する。

2.座標計算方法

部材数 n (各部材が通過する1点の座標は既知とする)、接合数 m のモデル(図1)において、 k 番目の接合位置の2部材を i 部材、 j 部材とし、部材間の関係式を作成する。各部材が通る既知点を点 I 、点 J 、 i 部材、 j 部材上の点を点 P_i 、点 P_j とし、媒介変数 s_i と s_j を用い、座標を下記のように設定する。

$$\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OI} + s_i \cdot \vec{e}_i, \quad \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \cdot \cos \theta_i \\ \cos \varphi_i \cdot \sin \theta_i \\ \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OP_j} = \overrightarrow{OJ} + s_j \cdot \vec{e}_j, \quad \overrightarrow{OJ} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j \cdot \cos \theta_j \\ \cos \varphi_j \cdot \sin \theta_j \\ \sin \varphi_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 φ : XY 平面に対する仰角、 θ : XY 平面上の角度 i 部材と j 部材について、 $\overrightarrow{P_iP_j}$ の長さは H_k で既知とすると、下式が成り立つ。

$$f_k(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j) = |\overrightarrow{P_iP_j}|^2 - H_k^2 = \{(J_x - I_x) + s_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \theta_j - s_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \theta_i\}^2 + \{(J_y - I_y) + s_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \sin \theta_j - s_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \theta_i\}^2 + \{(J_z - I_z) + s_j \cdot \sin \varphi_j - s_i \cdot \sin \varphi_i\}^2 - H_k^2 = 0 \quad (3)$$

上式は媒介変数を含んでいるため、 $\overrightarrow{IP_i}$ と $\overrightarrow{P_iP_j}$ 、 $\overrightarrow{JP_j}$ と $\overrightarrow{P_iP_j}$ が直交していることによる下記2式を使用する。

$$\overrightarrow{IP_i} \cdot \overrightarrow{P_iP_j} = 0 \quad (4)$$

$$\overrightarrow{JP_j} \cdot \overrightarrow{P_iP_j} = 0 \quad (5)$$

(4)・(5)式より媒介変数は下記のように求まる。

$$s_i = \frac{\eta(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j) \cdot \{\alpha(\varphi_i, \theta_i) + \beta(\varphi_j, \theta_j) + \gamma(\varphi_j)\} - \{\delta(\varphi_i, \theta_i) + \varepsilon(\varphi_i, \theta_i) + \zeta(\varphi_i)\}}{\eta(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j)^2 - 1} \quad (6)$$

$$s_j = \frac{\{\alpha(\varphi_i, \theta_i) + \beta(\varphi_i, \theta_i) + \gamma(\varphi_i)\} - \eta(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j) \cdot \{\delta(\varphi_i, \theta_i) + \varepsilon(\varphi_i, \theta_i) + \zeta(\varphi_i)\}}{\eta(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j)^2 - 1} \quad (7)$$

ここで、(6)・(7)式中の記号は(8)~(14)式による。

$$\alpha = (J_x - I_x) \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \theta_j \quad (8)$$

$$\beta = (J_y - I_y) \cdot \cos \varphi_j \cdot \sin \theta_j \quad (9)$$

$$\gamma = (J_z - I_z) \cdot \sin \varphi_j \quad (10)$$

$$\delta = (J_x - I_x) \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \theta_i \quad (11)$$

$$\varepsilon = (J_y - I_y) \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \theta_i \quad (12)$$

$$\zeta = (J_z - I_z) \cdot \sin \varphi_i \quad (13)$$

$$\eta(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j) = \cos \varphi_i \cdot \cos \varphi_j (\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j + \sin \theta_i \cdot \sin \theta_j) + \sin \varphi_i \cdot \sin \varphi_j \quad (14)$$

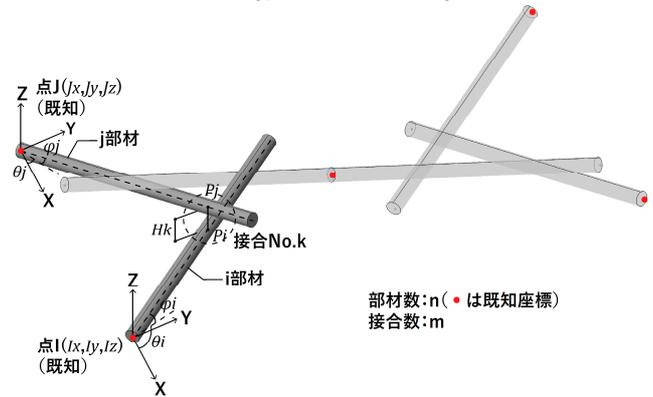


図1 不整形な三角形モジュールのレシプロカル架構

m 箇所全ての接合部分で関係式を作り、行列としてまとめると下式となる。

$$\{f\{x\}\} = \begin{Bmatrix} f_1(\dots) \\ \vdots \\ f_k(\theta_i, \varphi_i, \theta_j, \varphi_j) \\ \vdots \\ f_m(\dots) \end{Bmatrix} = \{0\}, \{x\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \varphi_i \\ \theta_j \\ \varphi_j \\ \vdots \\ \theta_n \\ \varphi_n \end{Bmatrix} \quad (15)$$

(15)式は多次元連立方程式であるため、Newton-Raphson法を使用し、(16)式の繰り返し計算によって解を求める。

$$\{x\}_{a+1} = \{x\}_a - \left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{x\}} \right]_a^{-1} \{f\{x\}_a\} \quad (16)$$

ここで、 $\left[\frac{\partial \{f\}}{\partial \{x\}} \right]$ はヤコビ行列

ただし、 $\{f\{x\}\}$ は m 行のベクトル、 $\{x\}$ は $2n$ 行のベクトルであるため、ヤコビ行列は正方行列にならない。

そのため、 $(2n - m)$ 個の境界条件を考慮し、(16)式における $\{x\}$ を、 m 行のベクトル $\{x'\}$ に読み替えた式により、実際の計算を行う必要がある。

3. 計算例 1

本報(その 1)のように、レシプロカル構造部材の XY 平面への投影位置が既知の場合の例として、図 2、表 1・2 のモデルについて座標計算を行った。

表 1. 計算例 1 の部材既知点座標と角度 θ ・仰角 ϕ

No.	X	Y	Z	初期条件		境界条件		計算結果	
				θ	ϕ	θ	ϕ	θ	ϕ
1	-1	-1	3	27	30	●		26.6	13.5
2	1	-1	3	135	30	●		135.0	14.8
3	0	1	3	270	30	●		270.0	14.2

※境界条件の「●」は値が既知であることを示す。

表 2. 計算例 1 の接合条件

No.	部材 i No.	部材 j No.	部材間距離H
1	1	2	0.1
2	2	3	0.1
3	3	1	0.1

計算時には未知数の θ または ϕ を初期値として仮定(表 1)するが、(15)式は複数解を有する式であるため、適切な初期値の設定が必要である。計算 1(図 2)のように、正しい重なり順序となる形状を初期値とすると、目的とする解に収束しやすい。計算 2(図 3)は部材が相互に重なりあっていない、意図しない形状の例。

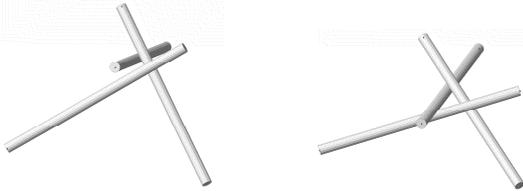


図 2. 計算例 1 の計算 1 (左: 初期形状, 右: 計算結果)



図 3. 計算例 1 の計算 2 (左: 初期形状, 右: 計算結果)

4. 計算例 2

1 本の材が 2 つのレシプロカルユニットの部材を共有する場合の例として、図 4 の楕円シェル形状について座標計算を行った。

表 3. 計算例 2 の部材既知点座標と角度 θ ・仰角 ϕ

No.	X	Y	Z	初期条件		境界条件		計算結果	
				θ	ϕ	θ	ϕ	θ	ϕ
1	1.00	0.00	2.90	90.0	0.0	●	●	90.0	0.0
2	3.60	0.00	1.31	90.0	0.0	●	●	90.0	0.0
3	0.00	1.20	2.91	0.0	0.0	●	●	0.0	0.0
4	1.30	1.50	2.69	245.0	25.5			229.5	26.1
5	2.84	1.98	1.75	345.0	-26.0			318.1	-20.6
6	3.75	1.74	0.00	270.0	65.0			259.7	66.8
7	1.95	3.20	1.78	120.0	-7.0			123.4	-8.7
8	0.00	4.30	1.53	0.0	0.0	●	●	0.0	0.0
9	1.70	4.53	0.00	270.0	70.0			217.7	73.5

※境界条件の「●」は値が既知であることを示す。

本モデルは 2 つの対称面を有することから、図 5 のように 1/4 部分のみを計算対象とし、対称面に位置する部材は XZ 平面または YZ 平面に垂直とする境界条件を与えた。

表 4. 計算例 2 の接合条件

No.	部材 i No.	部材 j No.	部材間距離H
1	1	3	●
2	3	4	●
3	4	1	0.01
4	2	5	0.05
5	5	6	0.05
6	6	2	0.05
7	4	7	0.05
8	7	5	0.05
9	5	4	0.05
10	7	8	0.05
11	8	9	0.05
12	9	7	0.05

※未知変数の数は 10 であり、条件式と個数を合わせるため、「●」については、計算結果による値とした。



図 4. 計算例 2 の楕円シェルモデル ※計算後ミラー複製

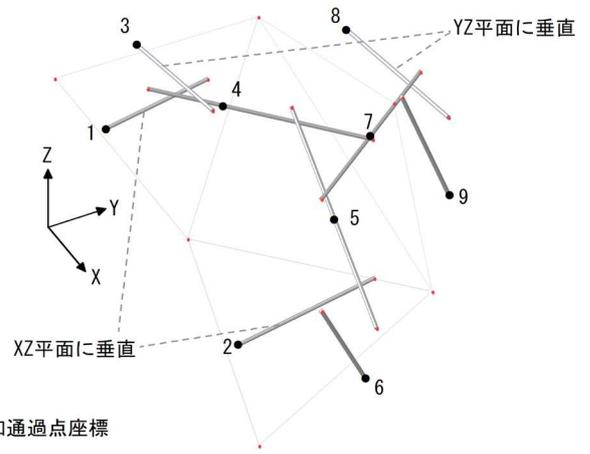


図 5. 計算例 2 の解析モデルの初期形状 (1/4 部分)

5. まとめ

不整形な三角形モジュールのレシプロカル構造において、部材芯間の距離を既知とした場合の部材座標の計算手法を提案し、2 つの計算例を示した。レシプロカル構造部材の接合部および加工方法の標準化の観点から有効な方法と考えている。