日本建築学会大会学術講演梗概集
（東北） 2018 年 9 月

非比例減衰構造の一次モード形の制御に関する考察

正会員 ○鈴木光雄*1

制御 モード形 非比例減衰
せん断型モデル

１．はじめに

振動解析における主要な検討の一つに、層間変形角の制御があげられる。層間変形角を制御するためには、制振装置の配置が有効と考えられるが、平面計画上の制約などで十分な効果が得られない場合もある。この場合、本体構造のモード形を制御して、応答変形を制御することも対策の一つとして有効である[1)]。本報告では、非比例減衰のせん断型モデルを対象に、一次モード形の制御を試みる。

２．せん断型モデルの固有値問題

検討対象をn質点のせん断型モデル（質量m_j、剛性k_j、減衰c_j）とし、減衰の分布を任意とすると、固有値$\lambda^{(s)}$と固有モードベクトル成分$u_j^{(s)}$は一般に複素数となる。ここで、右上のカッコ内はモードの次数を示す。s次の固有値$\lambda^{(s)}$は、固有円振動数$\omega^{(s)}$、減衰定数$h^{(s)}$、虚数単位iを用いて次式のように表される。

$$\lambda^{(s)} = \xi^{(s)} + \eta^{(s)} i \qquad (1)$$

$$\xi^{(s)} = -h^{(s)}\omega^{(s)},\ \eta^{(s)} = \omega^{(s)}\sqrt{1-{h^{(s)}}^2} \qquad \left(h^{(s)} < 1\right) \qquad (2)$$

固有値方程式におけるs次のj層に関する式は、下式となる。

$$\begin{aligned} &{\lambda^{(s)}}^2 m_j u_j^{(s)} + \lambda^{(s)} c_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) - \lambda^{(s)} c_{j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)}\right) \\ &\quad + k_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) - k_{j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

n~j層の式を足し合わせると下式の通りとなる。

$${\lambda^{(s)}}^2 \sum_{l=j}^{n} m_l u_l^{(s)} + \lambda^{(s)} c_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) + k_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) = 0 \qquad (4)$$

$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$を仮定し、$u_n^{(s)}$ を適宜設定すると、(4)式より、順次$u_{j-1}^{(s)}$が決定される。最後の 1 層目に関する式より$u_0^{(s)}$の値が算出される。$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$が真値の場合のみ、$u_0^{(s)} = 0$となり境界条件を満足する。

実務上の簡便化を目的に実数のみの扱いとするために、(4)式を実部と虚部に分離して整理したモードベクトルの成分$u_{j-1}^{(s)}$を(5)、(6)式に示す。ここで$Re[\cdot]$、$Im[\cdot]$は、実部と虚部を示す。

$$Re\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Re\left[u_j^{(s)}\right] + A_j^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] - B_j^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(s)}\right] \qquad (5)$$

$$Im\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Im\left[u_j^{(s)}\right] + B_j^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] + A_j^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(s)}\right] \qquad (6)$$

$A_j^{(s)}$、$B_j^{(s)}$は以下の手順で算出する。

$$\alpha_j^{(s)} = \xi^{(s)} c_j + k_j、\quad \beta_j^{(s)} = \eta^{(s)} c_j \qquad (7)$$

$$A_j^{(s)} = \left({}_1\gamma^{(s)}\alpha_j^{(s)} + {}_2\gamma^{(s)}\beta_j^{(s)}\right) / \left({\alpha_j^{(s)}}^2 + {\beta_j^{(s)}}^2\right) \qquad (8)$$

$$B_j^{(s)} = \left({}_2\gamma^{(s)}\alpha_j^{(s)} - {}_1\gamma^{(s)}\beta_j^{(s)}\right) / \left({\alpha_j^{(s)}}^2 + {\beta_j^{(s)}}^2\right) \qquad (9)$$

また、${}_1\gamma^{(s)}$、${}_2\gamma^{(s)}$は下式のとおりである。

$${}_1\gamma^{(s)} = {\xi^{(s)}}^2 - {\eta^{(s)}}^2、\quad {}_2\gamma^{(s)} = 2\xi^{(s)}\eta^{(s)} \qquad (10)$$

３．一次モード形の近似制御

(5)、**(6)**式では、未知数は各層のモード成分$Re\left[u_j^{(s)}\right]$、$\mathrm{Im}\left[u_j^{(s)}\right]$であるが、ここでは、各層のモード成分$Re\left[u_j^{(s)}\right]$を指定し、未知数を各階の建物剛性$k_j$、質量$m_j$、減衰$c_j$のいずれかとする。この際、固有振動数や減衰定数はもとのモデルの一次モードの値を用いる。厳密にはk_j、m_j、c_jを変化させるので、固有振動数や減衰定数は異なるものとなるが、一般に一次モードは、k_j、m_j、c_jの変動に比較的影響を受けづらい傾向を考慮して、近似的に制御する。

(5)式をk_j、m_j、c_jのいずれかを未知数として展開すると、各階で 2 次方程式、または 1 次方程式が得られる。これらの式を解くことで、モード形を制御するための値が得られる。以下に、k_j、m_j、c_jを未知数とする近似制御方程式を示す。

① 剛性k_jによる近似制御方程式

$${}_2p'^{(1)}_{k,j} k_j^2 + {}_1p'^{(1)}_{k,j} k_j + {}_0p'^{(1)}_{k,j} = 0 \qquad (11)$$

各係数は以下のようになる。

$${}_2p'^{(1)}_{k,j} = Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] \qquad (12)$$

$${}_1p'^{(1)}_{k,j} = 2\xi^{(1)} c_j \cdot Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] + E_j^{(1)} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} {}_0p'^{(1)}_{k,j} = &\left({\xi^{(1)}}^2 + {\eta^{(1)}}^2\right) c_j^2 \cdot Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] \\ &+ \xi^{(1)} c_j E_j^{(1)} + \eta^{(1)} c_j F_j^{(1)} \end{aligned} \qquad (14)$$

$$E_j^{(1)} = {}_1\gamma^{(1)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(1)}\right] - {}_2\gamma^{(1)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(1)}\right] \qquad (15)$$

$$F_j^{(1)} = {}_2\gamma^{(1)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(1)}\right] + {}_1\gamma^{(1)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(1)}\right] \qquad (16)$$

② 質量m_jによる近似制御方程式

$${}_1p'^{(1)}_{m,j} m_j + {}_0p'^{(1)}_{m,j} = 0 \qquad (17)$$

各係数は以下のようになる。

$${}_1p'^{(1)}_{m,j} = A_j^{(1)} \cdot Re\left[u_j^{(1)}\right] - B_j^{(1)} \cdot Im\left[u_j^{(1)}\right] \qquad (18)$$

$$\begin{aligned} {}_0p'^{(1)}_{m,j} = &Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] \\ &+ A_j^{(1)} \sum_{l=j+1}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(1)}\right] - B_j^{(1)} \sum_{l=j+1}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(1)}\right] \end{aligned} \qquad (19)$$

③ 減衰c_jによる近似制御方程式

$${}_2p'^{(1)}_{c,j} c_j^2 + {}_1p'^{(1)}_{c,j} c_j + {}_0p'^{(1)}_{c,j} = 0 \qquad (20)$$

各係数は以下のようになる。

$${}_2p'^{(1)}_{c,j} = \left({\xi^{(1)}}^2 + {\eta^{(1)}}^2\right) \cdot Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] \qquad (21)$$

$${}_1p'^{(1)}_{c,j} = 2\xi^{(1)} k_j \cdot Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] + \xi^{(1)} E_j^{(1)} + \eta^{(1)} F_j^{(1)} \qquad (22)$$

$${}_0p'^{(1)}_{c,j} = k_j^2 \cdot Re\left[u_j^{(1)} - u_{j-1}^{(1)}\right] + k_j E_j^{(1)} \qquad (23)$$

最上階から**(11)**、**(17)**、**(20)**式で得られたk_j、m_j、c_jのいずれかの値を用いて、**(6)**式により$\mathrm{Im}\left[u_j^{(s)}\right]$を得て、順次下階について、$k_j$、$m_j$、$c_j$を求めていく。また、2 次方程式で解が 2 つ得られる場合は、元の建物の値に近いほうの値を採用する。

Consideration of first mode shape control in non-proportional damping structure

SUZUKI Mitsuo

なお、これらの式は減衰c_j、減衰定数$h^{(s)}$を 0 とすることで、比例減衰の建物にも適用可能であり、より簡易な表現が可能である。また、減衰が大きくない建物に、減衰c_j、減衰定数$h^{(s)}$を 0 としてk_j、m_jによる制御を行ったとしても、比較的良好な結果が得られる場合がある。ただし、この場合、減衰c_jによる制御が適用できないことになる。本報告で示す手法は、減衰c_jによる制御を考慮できることが、利点の一つである。

４．一次モード形の制御例

建物は 10 層（階高 4m、建物高さ 40m）で、各階の重量が 5000kN、剛性は建築基準法の Ai 分布の地震荷重で 1/200 となるように設定されている。構造減衰は考慮せず、制振ダンパーを 1〜3 階に配置し減衰の効果を減衰係数c_jで設定している。建物の諸元を Table 1 に示す。この時の、一次モードの各層のモード層間成分$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$を、各層の総和を 1 で正規化して Fig. 1 に示す。減衰を考慮しない場合のモード形も示すが、1〜3 階がダンパーの効果で変形が小さくなっていることがわかる。

ここで、一次モードの各層の層間成分を一定となるように、k_j、m_j、c_jで制御することを試みる。例えば、$Re\left[u_{10}^{(1)}\right]=1.0$とし、各階で$Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]\left(\equiv Re\left[u_j^{(1)}-u_{j-1}^{(1)}\right]\right)=0.1$と設定する。また、指定する層間成分の拘束効果を高めるために$Im\left[u_{10}^{(1)}\right]=0.0$とする。

１）k_j、m_jによる制御

k_j、m_jに対応する**(11), (17)**式を最上階から下階に向け順次求めた。この結果を Table 2 に示す。この値を用いて複素固有値解析の結果から得られた各層のモード層間成分$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$を、各層の総和を 1 で正規化して Fig. 1 に示す。k_j、m_jの制御はグラフが重なっている状況にあり、2%程度の誤差で概ね$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$=0.1 となっている。ただし、1〜3 階と 4〜10 階でわずかなずれが生じている。これは、虚数成分の制御が対象外となるため、1〜3 階で設定されたc_jの影響が虚数成分に現れたためと考えられる。

２）k_jとc_jの組み合わせによる制御

c_jの制御では、8〜10 階で**(20)**式の実数解が得られなかった。この原因は、元の設定で変位の小さい階の減衰が最小の 0 であるため、変位を大きくする方向への制御が不能となったためと考えられる。

このため、8〜10 階では、k_jで制御することを試みる。その結果（control by k_j & c_j）を Table 2、Fig. 1、Fig. 2 に示す。8〜10 階でk_jを低下させることで、1 次モードの制御が比較的良好に実現できていることが確認できる。

先にも述べたように、これらは近似解であり、得られたk_j、m_j、c_jを多少変動させても、制御結果に大きな影響を与えない場合や、より良い結果を得られる可能性がある。

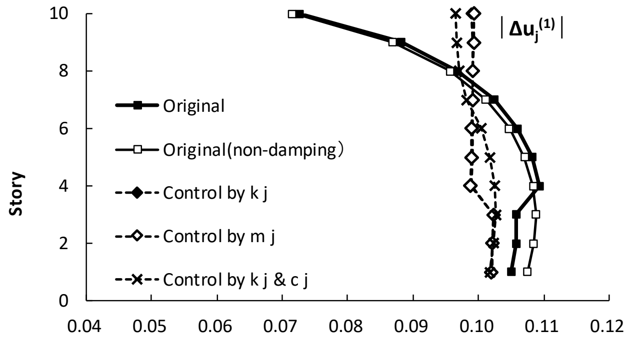

Fig. 1　Results of control of first mode

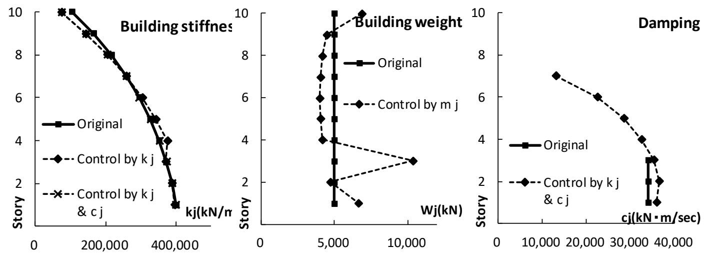

Fig. 2　Parameters obtained by control of first mode

５．まとめ

非比例減衰のせん断型モデルの 1 次モード形を質量m_j、剛性k_j、減衰c_jで近似的に制御する式を示した。解析例での確認を行い、本解析例では、k_j、m_jの制御で良好な結果が得られ、また、k_j、c_jの制御を組み合わせた場合も同等な結果が得られることを確認した。

参考文献

1) 鈴木光雄：複素固有値による簡易な耐震性能評価の検討と応用、構造工学論文集，2018.3

Table 1 Parameters of the analytical model

Story	Weight $W_j=m_j$・g (kN)	Stiffness k_j (kN/m)	Damping coefficient $c_{d,j}$ (kN・sec/m)
10	5000	103910	-
9	5000	164980	-
8	5000	215520	-
7	5000	258600	-
6	5000	295400	-
5	5000	326520	-
4	5000	352350	-
3	5000	373100	33910
2	5000	388940	33910
1	5000	400000	33910

Table 2 Results of control of first mode

Story	Original building		Mode control by k_j				Mode control by m_j				Mode control by k_j & c_j					
	Result of complex eigenvalue analysis		k_j by eq.(11) (kN/m)	rate of change from original building	Result of complex eigenvalue analysis		Wj=mj・g by eq.(17) (kN)	rate of change from original building	Result of complex eigenvalue analysis		k_j by eq.(11) (kN/m)	rate of change from original building	c_j by eq.(20) (kN・sec/m)	rate of change from original building	Result of complex eigenvalue analysis	
	$\|\Delta u_j^{(1)}\|$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$			$\|\Delta u_j^{(1)}\|$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$			$\|\Delta u_j^{(1)}\|$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$					$\|\Delta u_j^{(1)}\|$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$
10	0.073		75910	0.731	0.099		6845	1.369	0.099		75910	0.731	0	-	0.097	
9	0.088	$T^{(1)}$=	144340	0.875	0.099	$T^{(1)}$=	4459	0.892	0.099	$T^{(1)}$=	144380	0.875	0	-	0.097	$T^{(1)}$=
8	0.097	1.621	205310	0.953	0.099	1.593	4140	0.828	0.099	1.621	205410	0.953	0	-	0.097	1.621
7	0.102	(s)	258830	1.001	0.099	(s)	4020	0.804	0.099	(s)	258600	1.000	13150	-	0.098	(s)
6	0.106		304890	1.032	0.099		3989	0.798	0.099		295400	1.000	22490	-	0.100	
5	0.108	$h^{(1)}$=	343480	1.052	0.099	$h^{(1)}$=	4025	0.805	0.099	$h^{(1)}$=	326520	1.000	28370	-	0.102	$h^{(1)}$=
4	0.109	0.0712	374610	1.063	0.099	0.0851	4142	0.828	0.099	0.0711	352350	1.000	32510	-	0.102	0.0652
3	0.106		370820	0.994	0.102		10365	2.073	0.102		373100	1.000	35170	1.037	0.103	
2	0.106		387540	0.996	0.102		4731	0.946	0.102		388940	1.000	36360	1.072	0.102	
1	0.105		395870	0.990	0.102		6633	1.327	0.102		400000	1.000	35880	1.058	0.102	

*山下設計１

* Yamashita Sekkei Inc., Structural Design Dept. 1