Journal of Structural Engineering, Vol.64B, March 2018
構造工学論文集 Vol.64B (2018 年 3 月)
Architectural Institute of Japan
日本建築学会

複素固有値による簡易な耐震性能評価の検討と応用

SIMPLE SEISMIC PERFORMANCE EVALUATION AND APPLICATION USING COMPLEX EIGENVALUES

鈴木 光雄*
Mitsuo SUZUKI

Generally, damping distributions in passive structural control systems are non-proportional to distributions of stiffness or mass.   The eigenvalues of buildings with non-proportional damping are complex numbers. Therefore, complex eigenvalue analysis is necessary to get natural frequencies and damping constants for these buildings. However practicing structural designers are generally unfamiliar with complex eigenvalue analysis, so simple analytical method is desirable. In this paper, simple method of complex eigenvalue analysis (method-2) is proposed for shear spring model. This method is formulated by real numbers. So to grasp parameters of structures and dampers is relative easy and the method has wide ranges of applications.   In this paper, these formulations are used to control first mode shapes by setting structural stiffness.

Keywords : *Complex eigenvalue analysis, Holzer method, shear spring model, Maxwell model, Tuned viscous mass damper*
複素固有値解析，Holzer 法，せん断型モデル，Maxwell モデル，同調粘性マスダンパー

1.　はじめに

建築物の耐震安全性向上のために、粘性ダンパーなどを設置した制振構造が数多く採用され、耐震安全性の確認では、一般に時刻歴応答解析が行われる。時刻歴応答解析では限られた地震動での検証となる。多質点モデルの応答では、地震動の各周期成分の位相差の影響などにより、各次モードの最大応答値の発生時刻が異なるため、応答スペクトルのレベルが同等の地震動だとしても、応答結果に比較的大きなばらつきが生じる。場合により過小評価の可能性も考えられ、標準的な応答把握のため、モーダルアナリシスなどで補完確認しておくことは、有効な対応と考えられる。

制振構造の初期検討で、目標とする性能を効率的に達成する方法として、文献 1 では一質点制振構造の性能曲線から制振システムのパラメータを決定する方法が示されている。さらに、多質点建物の応答に対し、一次モードの固有周期、減衰定数をもとにした一質点制振構造の性能曲線を利用し、応答の推測が行われている。一般に、モーダルアナリシスでは、低次のモードを考慮するだけで十分な応答性状の把握が可能であるが、この例からわかるように、特に一次モードの重要性は明らかである。

文献 1 では実務検討での便宜を図るよう、一連の手順を行う表計算プログラムが提供されている。表計算プログラムの利用は、特に初期段階で行うパラメトリックな検討で、段階を追って把握することが容易となり、建物性状の理解を深めるうえで有効である。

実設計において、ダンパーの設置位置や台数は、建築、設備計画と調整の上決定される。建物内のダンパーの設置箇所は制約を受け、解析的に取扱いの容易な剛性比例型および質量比例型の減衰分布と大きく異なる例も多い。ダンパーの不均等分布の応答については、文献 1 に検討例が示されているが、ダンパー付加前の建物の応答性状が Ai 分布則に近いという条件が付けられている。近年はソフトファーストストーリーなど、ダンパーの配置が不均等となる例に加え、本体建物の剛性分布に偏りを有する場合がある。減衰分布が剛性分布や質量分布に比例しない非比例減衰の場合、固有値や固有モードが複素数となり、複素固有値解析が必要となる。減衰分布の偏在があまり大きくない場合は、無減衰（または比例減衰も含まれるが以下では無減衰と表記）の固有モードを用い、減衰定数は、減衰マトリクスの対角要素を用いた略算により、比較的良好な応答値の推定が可能となる [2]。しかし、略算値の精度を確認するには、現状では複素固有値解析による精算値と比較するしか無い。

複素固有値解析は専用の解析プログラムを使用すれば実行可能である。一方、複素固有値解析結果をもとにして検討するモーダルアナリシスでは、表計算プログラムなどで対応が可能である。特に初期段階で行うパラメトリックな検討では、実務上複数のプログラムを使用するのは煩雑であり、複素固有値解析とモーダルアナリシスを一連の作業で繰り返し検討できることが望ましい。

複素固有値をマトリクス計算によることなく算出する方法は、こ

*山下設計　構造設計部　博士（工学）
Yamashita Sekkei Inc., Structural Design Dept., Dr.Eng.

れまでいくつか紹介されている。代表的な方法として、代数方程式をもとに算出する方法 [3)4)]や、モード形の整合性をもとに算出する方法がある。代数方程式をもとにする方法は因数分解を経て求めるもので、実数範囲での扱いが可能であるが、代数方程式を定式化する煩雑さに加え、因数分解を行う煩わしさがある。モード形の整合性をもとに算出する方法として、Holzer 法が上げられる。これまでの複素固有値に関する Holzer 法では、虚数が含まれた定式が示され、グラフで推定値を解説するにとどまり、具体的な適用法を示したものは無いようである [5)]。また、節点間を減衰要素で直接接続するものに限定されている。

本論では、先に述べたように、設計初期段階の検討として低次モード、特に一次モードの固有周期や減衰定数の情報をもとに応答性状を把握するとともに、性能の向上について考察を行うことを目的としている。より効率的な構造計画を行うためには、複素固有値解析をマトリクス計算によることなく、より簡易に取り入れて、表計算レベルに落とし込めるとことが望ましい。この目的で、低次モードの複素固有値解析を、表計算レベルの簡易な算出を実数計算で行う方法（手法２）を示す。さらにこれまで Holzer 法の適用は節点間を減衰要素で直接接続するものに限定されていたが、制振構造の減衰のモデル化で必須とされる Maxwell モデルや、同類型の同調粘性マスダンパーについての算出方法も示す。ただし、より詳細な性状把握の便宜を図るために、従来の Holzer 法に準じた算出方法（手法1）も示し、高次モードの固有周期や減衰定数の算出についても、計算例を付けながら示す。これにより、簡易手法（手法２）の適用状況の確認や、境界条件の変位成分と固有振動数の関係曲線より一次モード算出の安定性が確認される。

本来、解析式を複素数で構成し、解を複素数として求めることは表現が簡潔となり、式展開が容易になるなどの利点がある。ただし、表計算プログラムでは、複素数計算は組み込み関数によるものとなり、計算対象の数値を引数で受け渡す必要があり、多項式計算等を構成することはかなり煩雑である。この点に関しては、本論のように、実数で定式化を行うことで改善が図られる。また、実数の範囲で示した定式化からは、構造のパラメータの構成が容易に把握される利点がある。本論ではこの点に着目し、複素固有値の算出における考察と誘導した定式化をもとにして、一次モードの層間のモード分布を制御する剛性の設定方法を示す。この方法は代数計算によるもので、取り扱いが容易である。この方法を用い、数値計算例で建物応答低減への応用についての検討も行った。

以上のように、本論では、3 章、4 章で簡易な複素固有値解析方法を提案し、この提案に基づいた定式化をもとに、5 章で応答変位分布を制御する一次モードのモード制御への応用例を示す。

なお、本論では、対象とする建物はせん断型モデルとしている。一般に建物応答の変形成分の大部分をせん断変形が占め、実建物の地震時の仕上げ材の等の被害、脱落を防止する上では、せん断変形の抑制が重要である。せん断型モデルは建物のモデルを表現する最も単純なモデルであり、このモデルで検討を行うことは、応答性状の理解を深めることにつながり、得られた知見は、より複雑なモデルの挙動を把握するうえで有効である。高層建物等では、上層階で比較的曲げ変形が大きくなる。制振要素を組み込んだ場合、制振要素がせん断変形のみに対して有効となるような評価が必要となる。最終的には、曲げせん断型モデルで詳細な検討を行う必要があるが、検討の初期段階にせん断型モデルで検討を行う場合、曲げ変形とせん断変形の比率をもとに、制振要素の性能を低減しておくなどの対応が考えられる。

２． 無減衰モデルの Holzer 法による固有値解析

2.1 Holzer 法の適用について

せん断型モデルの無減衰の固有モード解析として、コンピューターによる計算では一般に Jacobi 法等のマトリクス計算により収束解を求める方法が用いられている。これに対し、表計算レベルの計算を繰り返し、収束解を求める方法として、Stodola 法や Holzer 法が挙げられる。Stodola 法は始めに固有モード分布を仮定する方法であり、Holzer 法は固有値（振動数）を仮定する方法である。本報告で対象とする複素固有モードでは、虚数成分のモード分布形の仮定が困難な場合が考えられるため、Holzer 法を準用し、複素固有値解析を行う方法について検討する。

2.2 Holzer 法による固有値解析 [6)7)]

Fig.1 のようなn質点のせん断型モデルを考えj層の質量、せん断剛性をm_j、k_jとし、比例減衰を仮定し以下は無減衰として議論する。質量マトリクスを$\mathbf{M}$、剛性マトリクスを$\mathbf{K}$とし、無減衰の場合のs次の固有円振動数$\omega^{*(s)}$、固有モードベクトルを$\mathbf{u}^{*(s)}$とすると、このモデルの固有値問題は(1)式のようになる。右上の括弧内はモード次数を示す。また、右上の$*$は無減衰の場合の検討を示すものとする。

$$-{\omega^{*(s)}}^2\mathbf{Mu}^{*(s)}+\mathbf{Ku}^{*(s)}=\mathbf{0} \tag{1}$$

j層のモードベクトル成分を$u_j^{*(s)}$とし、各層に関する式を示す。

1層: $$-{\omega^{*(s)}}^2 m_1 u_1^{*(s)}+k_1 u_1^{*(s)}-k_2\left(u_2^{*(s)}-u_1^{*(s)}\right)=0 \tag{2}$$
…
j層: $$-{\omega^{*(s)}}^2 m_j u_j^{*(s)}+k_j\left(u_j^{*(s)}-u_{j-1}^{*(s)}\right)-k_{j+1}\left(u_{j+1}^{*(s)}-u_j^{*(s)}\right)=0 \tag{3}$$
…
n層: $$-{\omega^{*(s)}}^2 m_n u_n^{*(s)}+k_n\left(u_n^{*(s)}-u_{n-1}^{*(s)}\right)=0 \tag{4}$$

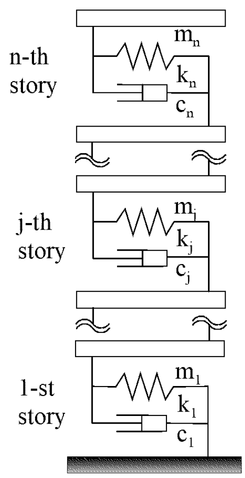


Fig.1 Shear spring model

次にn~j層の式を足し合わせると下式の通りとなる。

$$-{\omega^{*(s)}}^2\sum_{l=j}^{n} m_l u_l^{*(s)}+k_j\left(u_j^{*(s)}-u_{j-1}^{*(s)}\right)=0 \tag{5}$$

$u_{j-1}^{*(s)}$について整理すると下式の通りとなる。

$$u_{j-1}^{*(s)} = u_j^{*(s)} - \left(\omega^{*(s)2}/k_j\right)\sum_{l=j}^{n} m_l u_l^{*(s)} \tag{6}$$

(5)式は、固有円振動数$\omega^{*(s)}$での定常振動状態のj層の層せん断力と上部慣性力とのつり合い式に相当する。(5)式を変形した(6)式は$u_{j-1}^{*(s)}$に関する漸化式であり、$\omega^{*(s)}$を仮定し、$u_n^{*(s)}$ を1などと適宜設定すると、順次$u_{j-1}^{*(s)}$が決定される。最後の 1 層目に関する式より$u_0^{*(s)}$の値が算出される。$\omega^{*(s)}$が真の固有振動数の場合、$u_0^{*(s)}=0$となるが、その他の場合は0以外の値で、境界条件を満足しない。(6)式の$\omega^{*(s)}$に任意の値ω^*を代入して求められた$u_0^{*(s)}$をu_0^*とするとき、u_0^*とω^{*2}の関係を Fig.2 に示す。この図より、ω^*の異なる 2 つの$\omega^{*(s)}|_1$、$\omega^{*(s)}|_2$の二乗値と、そのときの$u_0^{*(s)}|_1$、$u_0^{*(s)}|_2$から、$u_0^{*(s)}$が0となる推定値$\omega^{*\prime(s)}$の二乗値を直線補間で次式により求める。

$$\begin{aligned}{\omega^{*\prime(s)}}^2 &= {\omega^{*(s)}|_2}^2 \\ &\quad - \left({\omega^{*(s)}|_2}^2 - {\omega^{*(s)}|_1}^2\right)\cdot u_0^{*(s)}|_2 \,/\, \left(u_0^{*(s)}|_2 - u_0^{*(s)}|_1\right)\end{aligned} \tag{7}$$

$u_0^{*(s)} - \omega^{*(s)2}$曲線では$u_0^{*(s)}$が0となる$n$個の点が得られ、その時の$\omega^*$が各次の固有振動数となる。各次の固有振動数を求めるためには 2 つの$\omega^{*(s)}|_1$、$\omega^{*(s)}|_2$を各次の固有振動数の近傍に設定する必要がある。初期の固有円振動数の設定に関し文献 7 では、一次モードは重力式で一次固有周期を推定し、高次モードは基礎固定の均一せん断棒の固有振動数の関係式より推定する方法が紹介されている。

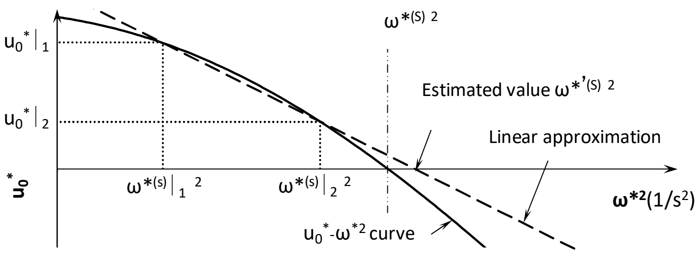


Fig.2 $u_0^{*(s)} - \omega^{*(s)2}$curve and Estimated value

Holzer 法による(1)式の固有値問題の演算手順を以下に示す。

$Step0$	$\omega^{*(s)}$の 2 つの仮定値$\omega^{*(s)}|_1$、$\omega^{*(s)}|_2$を定める。
$Step1$	$u_n^{*(s)}$ を適宜設定し、(6)式より$u_{j-1}^{*(s)}|_1$、$u_{j-1}^{*(s)}|_2$を算出する。
$Step2$	$u_0^{*(s)}|_1$、$u_0^{*(s)}|_2$と$\omega^{*(s)}|_1$、$\omega^{*(s)}|_2$から(7)式より推定値$\omega^{*\prime(s)}$を算出する。
$Step3$	$\omega^{*(s)}|_1$または$\omega^{*(s)}|_2$を$\omega^{*\prime(s)}$に置き換え、$Step1$に戻り、以降$Step1,2$を繰り返し$u_0^{*(s)}$が十分に小さくなった時点で演算を終了する。

３．一般減衰（非比例分布）への Holzer 法の適用

3.1 一般減衰の固有値問題

j層の減衰定数をc_j、減衰マトリクスを$\mathbf{C}$、固有値を$\lambda^{(s)}$とすると、減衰を考慮した固有値問題は(8)式のようになる。

$$\lambda^{(s)2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(s)} + \lambda^{(s)}\mathbf{C}\mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{0} \tag{8}$$

固有値$\lambda^{(s)}$と固有モードベクトル$\mathbf{u}^{(s)}$は一般に複素数となる。s次の固有値$\lambda^{(s)}$は、固有円振動数$\omega^{(s)}$、減衰定数$h^{(s)}$、虚数単位iを用いて次式のように表される。

$$\lambda^{(s)} = \xi^{(s)} + \eta^{(s)} i \tag{9}$$

$$\begin{cases} \xi^{(s)} = -h^{(s)}\omega^{(s)},\ \eta^{(s)} = \omega^{(s)}\sqrt{1-{h^{(s)}}^2} & \left(h^{(s)} < 1\right) \\ \xi^{(s)} = \left(-h^{(s)} + \sqrt{{h^{(s)}}^2 - 1}\right)\omega^{(s)},\ \eta^{(s)} = 0 & \left(h^{(s)} \geq 1\right) \end{cases} \tag{10}$$

s次のj層に関する式は、下式となる。

$$\begin{aligned}&\lambda^{(s)2} m_j u_j^{(s)} + \lambda^{(s)} c_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) - \lambda^{(s)} c_{j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)}\right) \\ &\quad + k_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) - k_{j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)}\right) = 0\end{aligned} \tag{11}$$

n~j層の式を足し合わせると下式の通りとなる。

$$\lambda^{(s)2}\sum_{l=j}^{n} m_l u_l^{(s)} + \lambda^{(s)} c_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) + k_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) = 0 \tag{12}$$

無減衰の場合と同様に$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$を仮定し、$u_n^{(s)}$ を適宜設定すると、(12)式より、順次$u_{j-1}^{(s)}$が決定される。

3.2 モードベクトル成分の算出

複素固有値問題を実数のみの扱いで計算を行うために、(12)式を虚数の扱いに留意して実部と虚部を分離して整理する。モードベクトルの成分$u_{j-1}^{(s)}$について整理した式を(13)、(14)式に示す。ここで$Re[\cdot]$、$Im[\cdot]$は、それぞれ複素数の実部と虚部を示す。

$$Re\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Re\left[u_j^{(s)}\right] + A_j^{(s)}\sum_{l=j}^{n} m_l\cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] - B_j^{(s)}\sum_{l=j}^{n} m_l\cdot Im\left[u_l^{(s)}\right] \tag{13}$$

$$Im\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Im\left[u_j^{(s)}\right] + B_j^{(s)}\sum_{l=j}^{n} m_l\cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] + A_j^{(s)}\sum_{l=j}^{n} m_l\cdot Im\left[u_l^{(s)}\right] \tag{14}$$

$A_j^{(s)}$、$B_j^{(s)}$は以下の手順で算出する。

$$\alpha_j^{(s)} = \xi^{(s)} c_j + k_j \tag{15}$$

$$\beta_j^{(s)} = \eta^{(s)} c_j \tag{16}$$

$$A_j^{(s)} = \left({}_1\gamma^{(s)}\alpha_j^{(s)} + {}_2\gamma^{(s)}\beta_j^{(s)}\right)/\left({\alpha_j^{(s)}}^2 + {\beta_j^{(s)}}^2\right) \tag{17}$$

$$B_j^{(s)} = \left({}_2\gamma^{(s)}\alpha_j^{(s)} - {}_1\gamma^{(s)}\beta_j^{(s)}\right)/\left({\alpha_j^{(s)}}^2 + {\beta_j^{(s)}}^2\right) \tag{18}$$

ここで、

$${}_1\gamma^{(s)} = {\xi^{(s)}}^2 - {\eta^{(s)}}^2 \tag{19}$$

$${}_2\gamma^{(s)} = 2\xi^{(s)}\eta^{(s)} \tag{20}$$

である。

3.3 一般減衰（非比例分布）の概要

最下層$(j=1)$に関する(13)、(14)式の$u_{j-1}^{(s)}$は$u_0^{(s)}$となる。無減衰のときと同様に$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$が真の値の場合、$u_0^{(s)}$は0となるが、その他の場合は0以外の値となり、境界条件を満足しない結果となる。

減衰を考慮する場合、ωとhの 2 つのパラメータが影響し、また、u_0が複素数となるため、実数成分と虚数成分を考慮する必要が生じ、扱いが複雑となる。ここで、u_0について複素数の絶対値の二乗値$|u_0|^2$で評価し、近似値ω、hを初期値として$|u_0|^2$の極小値を求める手順を繰り返すことで、$|u_0|^2$が 0 となるωを算出する方針とする。これは、いくつかの数値検討により、hが真の値に近い場合、真のω近傍で極小値を示す傾向が見受けられることによる。具体的な概要は 3.6 節の Fig.5 で確認する。

3.4 Holzer 法の適用（手法 1）

上記の考察より、Holzer 法を適用させた演算手順を示す。

$Step0$	$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$の近似値を初期値として設定する。
$Step1$	$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$の近似値をもとに、(13)、(14)式より、$\left|u_0^{(s)}\right|^2 = Re\left[u_0^{(s)}\right]^2 + Im\left[u_0^{(s)}\right]^2$を算出する。
$Step2$	$\omega^{(s)}$を固定し、$h^{(s)}$近傍で$\left|u_0^{(s)}\right|^2$が極小となる$h^{(s)}$を求める。

*Step*3　*Step*2で求めた$h^{(s)}$を固定し、今度は$\omega^{(s)}$近傍で$\left|u_0^{(s)}\right|^2$が極小となる$\omega^{(s)}$を求める。

*Step*4　*Step*2,3で更新された$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$を近似値として*Step*1,2,3を繰り返し、$\left|u_0^{(s)}\right|^2$が十分に小さくなった時点で演算を終了する。

---

*Step*0の$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$は真の値に近いことが望ましい。例として、無減衰時の固有円振動数$\omega^{*(s)}$と、対角要素による略算[2)]の減衰定数$h^{*(s)}$を初期値とする設定方法を示す。$h^{*(s)}$は無減衰の$\omega^{*(s)}$と固有モード成分$u_j^{*(s)}$を用いると、せん断型モデルでは(21)式の通りとなる。

$$h^{*(s)} = \frac{1}{2\omega^{*(s)}}\sum_{l=1}^{n} c_l\left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 / \sum_{l=1}^{n} m_l {u_l^{*(s)}}^2 \tag{21}$$

この初期値の仮定によっても、収束する固有値の次数が目的とする次数と異なる場合があり、その場合は、*Step*0の初期値を適宜シフトさせながら、算出を繰り返す必要が生じる。*Step*2,3の$\left|u_0^{(s)}\right|^2$の極小値の算出では、仮定された$\omega^{(s)}$や$h^{(s)}$の近傍の$\left|u_0^{(s)}\right|^2$の値を用いて、ニュートン法などを適用する（付録1参照）。

3.5　Holzer 法の適用（手法 2）

手法1は、$\left|u_0^{(s)}\right|^2$の極小値算出で数値解析上の工夫が求められる。ここでは、より簡便な方法について考察する。

真の値とは異なる仮定値$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$により求められた$u_0^{(s)}$は非ゼロとなるが、手法2では、$u_0^{(s)} = 0$とおきモード形を境界条件が満足されるように置き換える。このモードベクトルより$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$を更新する。$h^{(s)}$が1未満では、$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$はモードの直交性により複素共役の固有ベクトル$\mathbf{u}^{(s)}$、$\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}$を用いると、下式の関係が得られる。

$${\omega^{(s)}}^2 = {\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}^{(s)} / {\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(s)} \tag{22}$$

$$h^{(s)} = {\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{u}^{(s)} / 2\omega^{(s)}{\tilde{\mathbf{u}}^{(s)}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(s)} \tag{23}$$

複素共役の$\tilde{u}_j^{(s)}$は、(24)式、(25)上段式からなる複素共役の固有値$\tilde{\lambda}^{(s)}$を用い、$u_j^{(s)}$と同様に(13)～(18)式より算出する。$h^{(s)}$が1以上では、(25)下段の$\tilde{\xi}^{(s)}$を用いた固有値$\tilde{\lambda}^{(s)}$に対応する$\tilde{u}_j^{(s)}$を求める。

$$\tilde{\lambda}^{(s)} = \tilde{\xi}^{(s)} + \tilde{\eta}^{(s)} i \tag{24}$$

$$\begin{cases} \tilde{\xi}^{(s)} = -h^{(s)}\omega^{(s)},\ \tilde{\eta}^{(s)} = -\omega^{(s)}\sqrt{1-{h^{(s)}}^2} & \left(h^{(s)} < 1\right) \\ \tilde{\xi}^{(s)} = \left(-h^{(s)} - \sqrt{{h^{(s)}}^2 - 1}\right)\omega^{(s)},\ \tilde{\eta}^{(s)} = 0 & \left(h^{(s)} \geq 1\right) \end{cases} \tag{25}$$

せん断型建物モデルの場合、$h^{(s)}$が1未満の場合は$u_j^{(s)}$と$\tilde{u}_j^{(s)}$の虚数成分が異符号であることを考慮して整理すると(26)、(27)式の通りとなる。このように$h^{(s)}$が1未満では複素共役の$\tilde{u}_j^{(s)}$を算出する必要は生じない。

$${\omega^{(s)}}^2 = \sum_{l=1}^{n} k_l\left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right|^2 \ / \ \sum_{l=1}^{n} m_l\left|u_l^{(s)}\right|^2 \tag{26}$$

$$h^{(s)} = \frac{1}{2\omega^{(s)}}\sum_{l=1}^{n} c_l\left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right|^2 \ / \ \sum_{l=1}^{n} m_l\left|u_l^{(s)}\right|^2 \tag{27}$$

$$\left|u_l^{(s)}\right|^2 = Re\left[u_l^{(s)}\right]^2 + Im\left[u_l^{(s)}\right]^2 \tag{28}$$

$$\left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right|^2 = Re\left[u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right]^2 + Im\left[u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right]^2 \tag{29}$$

一方、$h^{(s)}$が1以上の場合は、(25)下段の$\tilde{\xi}^{(s)}$を用いた固有値$\tilde{\lambda}^{(s)}$に対応する$\tilde{u}_j^{(s)}$を算出することで、$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$が下式により求められる。

$${\omega^{(s)}}^2 = \sum_{l=1}^{n} k_l \cdot Re\left[u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right]Re\left[\tilde{u}_l^{(s)} - \tilde{u}_{l-1}^{(s)}\right] \ / \ \sum_{l=1}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right]Re\left[\tilde{u}_l^{(s)}\right] \tag{30}$$

$$h^{(s)} = \frac{1}{2\omega^{(s)}}\sum_{l=1}^{n} c_l \cdot Re\left[u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right]Re\left[\tilde{u}_l^{(s)} - \tilde{u}_{l-1}^{(s)}\right] \ / \sum_{l=1}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right]Re\left[\tilde{u}_l^{(s)}\right] \tag{31}$$

演算手順を以下に示す。

---

*Step*0　$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$の近似値を初期値として設定する。

*Step*1　$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$の近似値をもとに、(13)、(14)式より$u_j^{(s)}$を算出する。$h^{(s)}$が1以上の場合は$\tilde{u}_j^{(s)}$も合わせて算出する。

*Step*2　$u_0^{(s)} = 0$として、$h^{(s)}$が1以下の場合は(26)、(27)式より、$h^{(s)}$が1以上の場合は(30)、(31)式より$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$を算出する。

*Step*3　*Step*2で更新された$\omega^{(s)}$、$h^{(s)}$を用いて、*Step*1に戻り、以降*Step*1,2を繰り返し$\left|u_0^{(s)}\right|^2$が十分に小さくなった時点で演算を終了する。

---

*Step*0では、手法1と同様に近似値を適用する。高次モードで固有値が近接する場合等では、求める固有値に収束しないケースが生じる。また、過減衰では、*Step*0での近似値の精度が低く、同様に収束性が劣る。ただし、実務では比較的減衰の小さい低次モードまでの考慮で十分なことが多く、十分に実用に耐えうるものと考える。また、当然のことながら、無減衰への固有値解析にも適用可能である。

3.6　数値解析例

解析モデルは5質点とし、重量、剛性はTable1に示す通りで、減衰は2タイプを設定した。複素固有値解析の結果をTable2、Fig.3（付録2）に示す。収束判定は、$\left|u_0^{(s)}\right|^2 / \sum_{l=1}^{n}\left|u_l^{(s)}\right|^2 < 1.0\times10^{-10}$とし、一般固有値解析のQZ法による結果と有効数字5ケタ程度まで一致する結果となった。

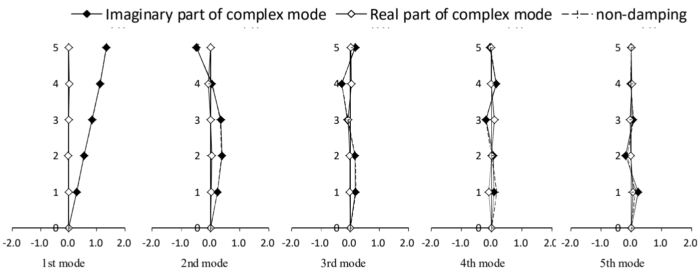
Fig.4に無減衰時の$u_0 - \omega$関係を、Fig.5に減衰タイプ1、2の$|u_0|^2 - \omega$関係を示す。縦の二点鎖線は固有円振動数の位置を示す。Fig.5では、1～5次モードの減衰定数に対応する5つ曲線を示しており、各次のω、hに対応する値のときのみ$|u_0|^2 = 0$となっている。また、hが真の値に近い場合、真のω近傍で極小値を示す傾向が見受けられる。減衰タイプ1では、手法2においても各モードの算出は可能であったが、減衰タイプ2では、手法2で4次モードの収束値が得られなかった。このため、手法1で、初期の$\omega^{(s)}$を適宜シフトしながら算出した（付録3）。手法2で困難だった理由としては、Fig.5に示すように減衰タイプ2の3次モードと4次モードの周期が近接しているため、4次モード近傍の値を初期値とした場合でも、3次モードに収束する結果になったと考えられる。

Table 1 Parameters of the analytical model

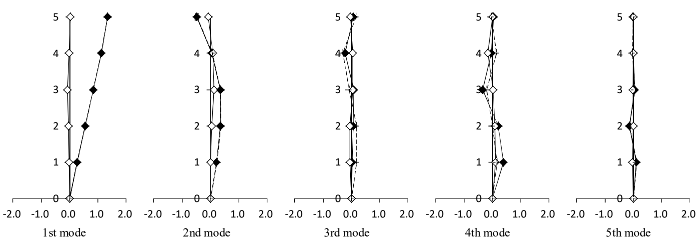
Story	Weight $W_j=m_j \cdot g$ (kN)	Stiffness k_j (kN/m)	Damping coefficient c_j (kN・sec/m)	
			Type1	Type2
5	5000	117040	5000	0
4	5000	188280	5000	0
3	5000	243030	5000	10000
2	5000	284080	10000	10000
1	5000	312500	10000	10000

Table 2 Results of complex eigenvalue analysis

mode	Non-damping		Type 1				Type 2			
			Eqn.(21)	Exact by method 1			Eqn.(21)	Exact by method 1		
	T_j^*(s)	ω_j^* (1/s)	h_j^*	T_j(s)	ω_j(1/s)	h_j	h_j^*	T_j(s)	ω_j(1/s)	h_j
1	0.985	6.382	0.096	0.984	6.388	0.096	0.087	0.979	6.418	0.087
2	0.391	16.08	0.289	0.387	16.24	0.287	0.087	0.387	16.23	0.078
3	0.249	25.20	0.406	0.248	25.38	0.410	0.223	0.220	28.56	0.066
4	0.186	33.82	0.486	0.184	34.07	0.467	0.305	0.211	29.72	0.460
5	0.148	42.40	0.634	0.152	41.35	0.658	0.734	0.150	41.93	0.754



(a) Type1



(b) Type2

Fig.3 Mode shapes

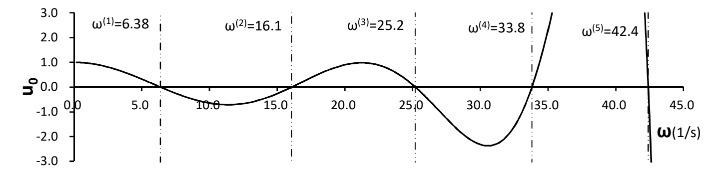
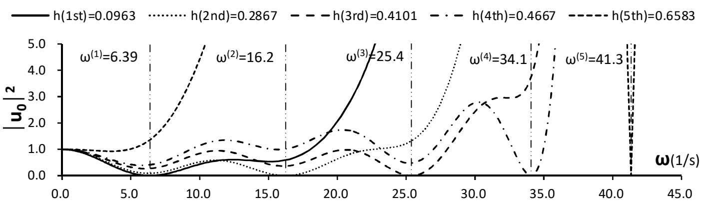
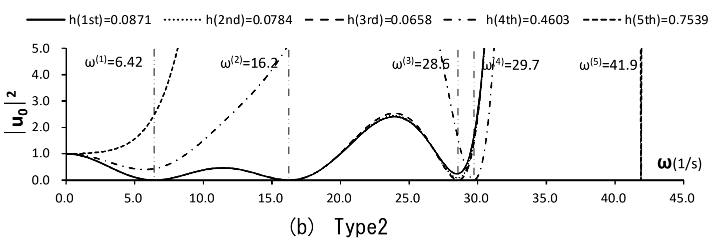


Fig.4 The relations of u_0 and ω (non-damping)



(a) Type1



(b) Type2

Fig.5 The relations of $|u_0|^2$ and ω

４．剛性が直列に接続された減衰機構に対する Holzer 法の適用

剛性と減衰機構が直列に接続された最も単純なモデルは Maxwell モデルである。この他に、剛性と直列に配置された減衰機構の部分に慣性質量を並列に配置したモデルを Fig.7(a)に示す。このモデルで、実用的に制振効果を発揮するには、接続する剛性を柔な部材とし慣性質量の大振幅運動を期待することになるものと考えられる。このような慣性質量の動きと粘性減衰要素によるエネルギー吸収効果を期待する制振要素は、同調粘性マスダンパー等と称される。本論では、このような使用を想定して初期値の設定や、解析例などを示すこととし、以下では、同調粘性マスダンパーと呼ぶものとする。

Maxwell モデルは、同調粘性マスダンパーの慣性質量が 0 の場合であることから、ここでは同調粘性マスダンパーについて Holzer 法の適用を示し、適宜、慣性質量が 0 の場合の Maxwell モデルについて留意点を示す。以下ではダンパーの個数をn_dとする。

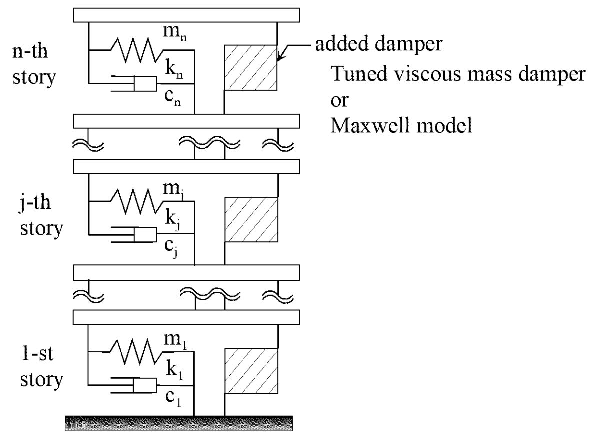
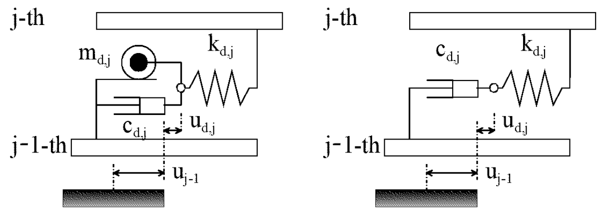


Fig.6 Shear spring model with added damper



(a) Tuned viscous mass damper (b) Maxwellmodel

Fig.7 The composition of added damper

4.1 同調粘性マスダンパーの固有値問題

同調粘性マスダンパーの慣性質量、減衰係数とばね剛性をそれぞれ$m_{d,j}$、$c_{d,j}$、$k_{d,j}$とする。各層に接続される同調粘性マスダンパーの剛性と減衰機構との中間節点の変位$u_{d,j}$は、接続する下層からの相対変位とする（Fig.7）。固有値問題におけるs次の場合のj層の質点の関係式と、同調粘性マスダンパーの中間接点に関する関係式は下式となる。

$$\begin{aligned}{\lambda^{(s)}}^2 m_j u_j^{(s)} &+ \lambda^{(s)} c_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) - \lambda^{(s)} c_{j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)}\right) \\ &+ k_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) - k_{j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)}\right) \\ &+ k_{d,j}\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)} - u_{d,j}^{(s)}\right) - k_{d,j+1}\left(u_{j+1}^{(s)} - u_j^{(s)} - u_{d,j+1}^{(s)}\right) = 0 \quad (32)\end{aligned}$$

$$\lambda^{(s)^2} m_{d,j} u_{d,j}^{(s)} + \lambda^{(s)} c_{d,j} u_{d,j}^{(s)} - k_{d,j}\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)} - u_{d,j}^{(s)}\right) = 0 \tag{33}$$

(32)式について、n~j層の式を足し合わせると下式の通りとなる。

$$\lambda^{(s)^2} \sum_{l=j}^{n} m_l u_l^{(s)} + \lambda^{(s)} c_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) + k_j\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right) + k_{d,j}\left(u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)} - u_{d,j}^{(s)}\right) = 0 \tag{34}$$

上記で、$m_{d,j}$=0 とすれば、Maxwell モデルに対応する。

4.2 モードベクトル成分の算出

(33)式を$u_{d,j}^{(s)}$に関し解き、(34)式に代入して$u_{j-1}^{(s)}$を算出し、次いで$u_{d,j}^{(s)}$を求める手順とする。$u_{j-1}^{(s)}$、$u_{d,j}^{(s)}$は下記のように表される。

$$Re\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Re\left[u_j^{(s)}\right] + A_{d,j}^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] - B_{d,j}^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(s)}\right] \tag{35}$$

$$Im\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Im\left[u_j^{(s)}\right] + B_{d,j}^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] + A_{d,j}^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Im\left[u_l^{(s)}\right] \tag{36}$$

$$Re\left[u_{d,j}^{(s)}\right] = C_{d,j}^{(s)} \cdot Re\left[u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right] + D_{d,j}^{(s)} \cdot Im\left[u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right] \tag{37}$$

$$Im\left[u_{d,j}^{(s)}\right] = -D_{d,j}^{(s)} \cdot Re\left[u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right] + C_{d,j}^{(s)} \cdot Im\left[u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right] \tag{38}$$

各係数は以下の手順で計算する。以下では、実務的な適用範囲を考慮して$h^{(s)}$が 1 以下の場合のみを示し$\xi^{(s)}$、$\eta^{(s)}$は(10)式による。

$${}_1\alpha_{d,j}^{(s)} = {}_1\gamma^{(s)} m_{d,j} + \xi^{(s)} c_{d,j} + k_{d,j} \tag{39}$$

$${}_1\beta_{d,j}^{(s)} = {}_2\gamma^{(s)} m_{d,j} + \eta^{(s)} c_{d,j} \tag{40}$$

$$C_{d,j}^{(s)} = {}_1\alpha_{d,j}^{(s)} k_{d,j} \Big/ \left({}_1\alpha_{d,j}^{(s)^2} + {}_1\beta_{d,j}^{(s)^2}\right) \tag{41}$$

$$D_{d,j}^{(s)} = {}_1\beta_{d,j}^{(s)} k_{d,j} \Big/ \left({}_1\alpha_{d,j}^{(s)^2} + {}_1\beta_{d,j}^{(s)^2}\right) \tag{42}$$

$${}_2\alpha_{d,j}^{(s)} = \xi^{(s)} c_j + k_j + \left(1 - C_{d,j}^{(s)}\right) k_{d,j} \tag{43}$$

$${}_2\beta_{d,j}^{(s)} = \eta^{(s)} c_j + D_{d,j}^{(s)} k_{d,j} \tag{44}$$

$$A_{d,j}^{(s)} = \left({}_1\gamma^{(s)}\, {}_2\alpha_{d,j}^{(s)} + {}_2\gamma^{(s)}\, {}_2\beta_{d,j}^{(s)}\right) \Big/ \left({}_2\alpha_{d,j}^{(s)^2} + {}_2\beta_{d,j}^{(s)^2}\right) \tag{45}$$

$$B_{d,j}^{(s)} = \left({}_2\gamma^{(s)}\, {}_2\alpha_{d,j}^{(s)} - {}_1\gamma^{(s)}\, {}_2\beta_{d,j}^{(s)}\right) \Big/ \left({}_2\alpha_{d,j}^{(s)^2} + {}_2\beta_{d,j}^{(s)^2}\right) \tag{46}$$

上記で、$m_{d,j}$=0 とすれば、Maxwell モデルに対応する。

4.3 固有周期、減衰定数の近似値

（１）同調粘性マスダンパーの場合

同調粘性マスダンパーの固有値は、一般減衰の場合と同様に共役成分が含まれるため、質点数nと同調粘性マスダンパー数n_dの合計の 2 倍の数の複素固有値が算出される。ただし、複素固有値は共役となるため、固有周期、減衰定数の個数は$n + n_d$となる。

各次の固有周期の近似値は、減衰を 0 として求められた実数の固有周期$\omega^{*(s)}$とする。このとき、対角要素の略算による減衰定数$h^{*(s)}$は(21)式と同様に(47)式から求められる。

$$h^{*(s)} = \frac{1}{2\omega^{*(s)}} \left\{ \sum_{l=1}^{n} c_l \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 + \sum_{l=1}^{n_d} c_{d,l} \left(u_{d,l}^{*(s)}\right)^2 \right\} \Big/ \left\{ \sum_{l=1}^{n} m_l u_l^{*(s)^2} + \sum_{l=1}^{n_d} m_{d,l} u_{d,l}^{*(s)^2} \right\} \tag{47}$$

（２）Maxwell モデルの場合

Maxwell モデルの場合では、固有値は Maxwell モデルでは、減衰と剛性が接続する中間節点に関する(32) 式に$\lambda^{(s)}$の二乗項がないため、n_d個分の実数の固有値が付加される。この結果、建物全体では建物質点数nの 2 倍の数の共役複素固有値とn_d個の実数の固有値となる。

Maxwell モデルでは、同調粘性マスダンパーに比べ、ダンパー構成要素の剛性の値が大きくなり、減衰を付加された全体構造の剛性が大きくなる。この効果を考慮して、固有周期、および減衰定数の近似値として設定する初期値は、定常状態の履歴ループに関する力学原理 [1]と減衰の吸収エネルギーに基づき [2]、質点のみの無減衰の固有値解析結果$\omega^{*(s)}$、$u_j^{*(s)}$を用いて下式により求める。

$$\omega^{(s)^2} = \left\{ \sum_{l=1}^{n} k_l \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 + \sum_{l=1}^{n_d} k'_{d,l} \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 \right\} \Big/ \sum_{l=1}^{n} m_l u_l^{*(s)^2} \tag{48}$$

$$h^{(s)} = \frac{\omega^{(s)}}{2} \left\{ \sum_{l=1}^{n} c_l \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n_d} c'_{d,l} \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 \right\} \Big/ \left\{ \sum_{l=1}^{n} k_l \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 + \sum_{l=1}^{n_d} k'_{d,l} \left(u_l^{*(s)} - u_{l-1}^{*(s)}\right)^2 \right\} \tag{49}$$

$$k'_{d,j} = k_{d,j} \left(c_{d,j}\omega^{*(s)}/k_{d,j}\right)^2 \Big/ \left\{1 + \left(c_{d,j}\omega^{*(s)}/k_{d,j}\right)^2\right\} \tag{50}$$

$$c'_{d,j} = c_{d,j} \Big/ \left\{1 + \left(c_{d,j}\omega^{(s)}/k_{d,j}\right)^2\right\} \tag{51}$$

上記で求められるものは、質点数nの 2 倍の数の共役複素固有値に対応する。n_d個の実数の固有値に関するモード算出では別途工夫が必要となる。n_d個の固有値に関するモードは、一般に中間節点の挙動が主であり、建物の刺激関数は小さく耐震性能を考慮するうえでは不要であることが多い。算出の概要については、参考として 4.6 節の解析例をもとに付録 4 に示す。

以下ではn個の固有周期と減衰定数を算出について示す。

4.4 Holzer 法の適用（手法 1）

演算手順は 3 章の手法 1 と同様であり、$Step1$の$\left|u_0^{(s)}\right|^2$の算出に(33), (34)式と各係数(39)～(46)式を適用する。

4.5 Holzer 法の適用（手法 2）

演算手順は 3 章の手法 2 と同様で$Step1$で$u_{j-1}^{(s)}$、$u_{d,j}^{(s)}$の算出に(35)～(38)式と各係数(39)～(46)式を適用する。

$Step2$の$\omega^{(s)}$と$h^{(s)}$の算出は、下式および(28)、(29)による。

$$\omega^{(s)^2} = \left\{ \sum_{l=1}^{n} k_l \left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right|^2 + \sum_{l=1}^{n_d} k_{d,l} \left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)} - u_{d,l}^{(s)}\right|^2 \right\} \Big/ \left\{ \sum_{l=1}^{n} m_l \left|u_l^{(s)}\right|^2 + \sum_{l=1}^{n_d} m_{d,l} \left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2 \right\} \tag{52}$$

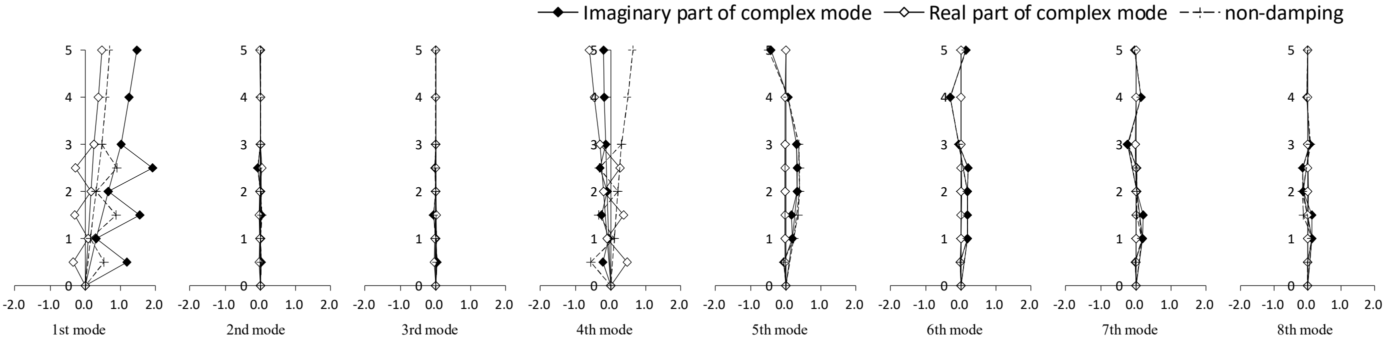
$$h^{(s)} = \frac{1}{2\omega^{(s)}} \left\{ \sum_{l=1}^{n} c_l \left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)}\right|^2 + \sum_{l=1}^{n_d} c_{d,l} \left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2 \right\} \Big/ \left\{ \sum_{l=1}^{n} m_l \left|u_l^{(s)}\right|^2 + \sum_{l=1}^{n_d} m_{d,l} \left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2 \right\} \tag{53}$$

$$\left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2 = Re\left[u_{d,l}^{(s)}\right]^2 + Im\left[u_{d,l}^{(s)}\right]^2 \tag{54}$$

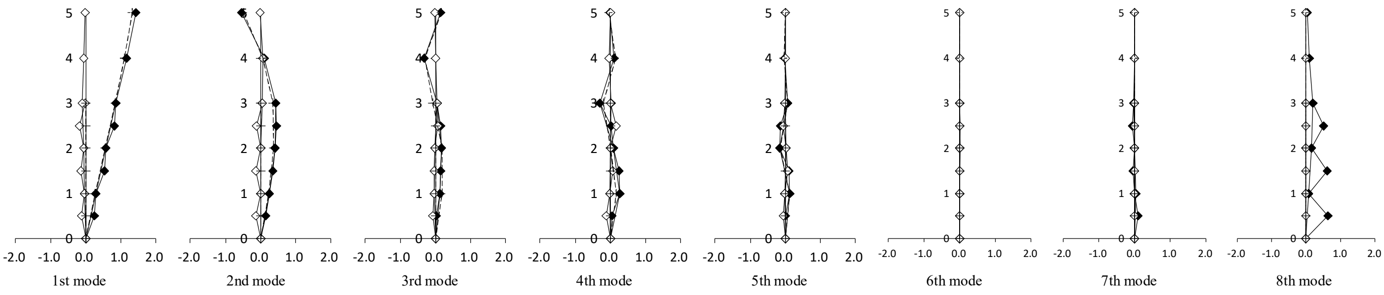
$$\left|u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)} - u_{d,l}^{(s)}\right|^2 = Re\left[u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)} - u_{d,l}^{(s)}\right]^2 + Im\left[u_l^{(s)} - u_{l-1}^{(s)} - u_{d,l}^{(s)}\right]^2 \tag{55}$$

4.6 数値解析例

主体構造の解析モデルは 3 章の解析例と同じ 5 質点とし、重量、剛性は Table1 に示す通りである。また、$c_j = 0$とし、減衰は付加減衰のみとして同調粘性マスダンパーと Maxwell モデルの 2 タイプを設定し、1～3 層に配置した。それぞれの減衰の諸元は Table3 に示すとおりである。同調粘性マスダンパーは、一次の建物のみの一般化質量と、付加質量m_dの一般化質量の比を 6%をとし、1 から 3 層に等分布に配置した。また、建物の一次固有周期に対する変位最適制御解を用いて剛性k_dと減衰c_dを設定した [8]。主体構造の剛性分布と慣性質量の分布が比例しない場合、変位最適制御解は定点理論解に適合しない [9]が、このモデルは、非比例分布の複素固有値解析例として示すものである。



(a) Tuned viscous mass damper



(b) Maxwell model

Fig.8 Mode shapes

Table 3 Parameters of added damper

Story	Tuned viscous mass damper			Maxwell model	
	$m_{d,j}$ (kN･sec^2/m)	$k_{d,j}$ (kN/m)	$c_{d,j}$ (kN･sec/m)	$k_{d,j}$ (kN/m)	$c_{d,j}$ (kN･sec/m)
3	541	25150	1144	200000	10000
2	541	25150	1144	200000	10000
1	541	25150	1144	200000	10000

Table 4 Results of complex eigenvalue

(a) Tuned viscous mass damper

Mode	Non-damping			Exact (method1,2)		
	T_j* (s)	ω_j* (1/s)	h_j^* Eqn.(47)	T_j (s)	ω_j (1/s)	h_j
1	1.090	5.767	0.0838	1.059	5.931	0.0850
2	0.968	6.492	0.1618	0.968	6.492	0.1618
3	0.961	6.539	0.1612	0.961	6.539	0.1612
4	0.843	7.450	0.0766	0.867	7.245	0.0759
5	0.385	16.34	0.00041	0.385	16.34	0.00040
6	0.244	25.74	0.00012	0.244	25.74	0.00012
7	0.181	34.63	0.00006	0.181	34.63	0.00006
8	0.142	44.26	0.00005	0.142	44.26	0.00005

(b) Maxwell model

Mode	Eqn.(52)		Eqn.(53)	Exact (method1,2)		
	T_j (s)	ω_j (1/s)	h_j	T_j (s)	ω_j (1/s)	h_j
1	0.961	6.541	0.0766	0.954	6.586	0.0769
2	0.375	16.75	0.0489	0.374	16.80	0.0452
3	0.226	27.79	0.0688	0.230	27.34	0.0300
4	0.165	38.07	0.0586	0.159	39.42	0.0759
5	0.118	53.07	0.0729	0.115	54.43	0.0726
6	-	-	-	Eigenvalue= -11.81		
7	-	-	-	Eigenvalue= -12.68		
8	-	-	-	Eigenvalue= -17.44		

Maxwell モデルは 3 章の減衰タイプ 2 の減衰定数c_jと同じ値を用い、剛性k_dを直列に配置したものである。

収束判定条件は 3 章の通りである。複素固有値解析の結果を Table4 と Fig.8 に示す。結果は、一般固有値解析の QZ 法による結果と有効数字 5 ケタ程度まで一致する結果となった。Fig.8 の刺激関数で、付加減衰の中間接点の位置は各層の中間に示している。また、Maxwell モデルの 6 次から 8 次は固有値の絶対値が小さい順に並べている。

Maxwell モデルでは、手法 1、2 において算出対象とする 1～5 次モードの算出が可能であった。同調粘性マスダンパーでは、手法 2 で全モードの算出は可能となったが、手法 1 では、2 次モードが算出できず、3 次モードに収束してしまう結果となった。2 次モードと 3 次モードの減衰定数では$h^{(2)}$ =0.161797233、$h^{(3)}$ =0.161168669 が近接しており、また、Fig.9 に示す$|u_0|^2-\omega$曲線では、$h^{(2)}$と$h^{(3)}$のわずかな差で$\omega^{(3)}$=0 となる極小値が表れることがわかる。このような非常にセンシティブな挙動により、$\omega^{(2)}$を探索中のhの誤差により、hに敏感に変動する近傍の$\omega^{(3)}$を算出してしまうためである。

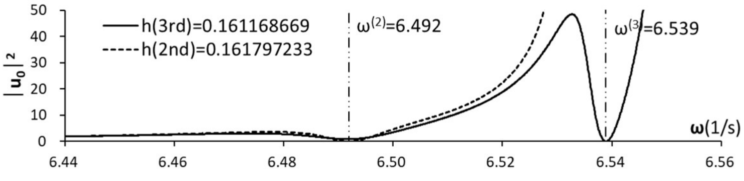


Fig.9 The relations of $|u_0|^2$ and ω

ただし、Fig.8(a)からもわかるように、2 次、3 次モードの建物の刺激関数は非常に小さく、建物の応答に与える影響は小さくなっている。Fig.8(a)には、無減衰の刺激関数も示しているが、2 次、3 次

モードでは重なって判別が困難となっているように、複素固有値解析結果と同様、非常に小さくなっている。また、Table4(a)に示す無減衰の略算結果は周期、減衰定数ともに比較的精度がよくなっている。同調粘性マスダンパーを設置した制振システムは、慣性質量の挙動を増幅させて減衰効果を向上させるシステムであることから、モード形に与える影響としては、制振要素のうち慣性質量と剛性の影響が支配的と考えられる。また、本解析ケースではシステムの減衰定数が最大で 16%程度であり、本体構造とダンパーのモード形の関係は、付加減衰を 0 とした制振システムでも同等な結果となったものと考えられる。本解析ケースのように、無減衰のモード結果からもモードの概要を掴むことができれば、同調粘性マスダンパー特有の刺激関数が小さい 2 次、3 次のモードを耐震性検討の考慮外とするなどにより対応することが可能と考えられる。ただし、このような判断が可能となる条件については、今後の検討課題である。

Maxwell モデルの 6～8 次モードについては、4.3 節で触れたように算出の概要を付録 4 に示す。また、6、7 次モードに比べ 8 次モードでは主体構造の刺激関数が比較的大きいが、全体応答に与える影響度が小さいことが確認され（付録 5 参照）、本解析例では耐震性能の傾向を検討するうえでは、6～8 次モードを考慮外とすることが可能である。

５．モード制御への応用

4 章で示した手法を用いて、ダンパーの配置や量を変化させて、目標とする減衰定数を実現する一般的な構造計画が可能となる。ただし、1 章でも述べたとおり、実設計において、建物に設置されるダンパーの設置位置や基数は、建築計画、設備計画など様々な調整を経て決定され、必ずしも構造の要望通りとならない場合がある。ここでは、ダンパーの設置階および減衰量が制約されている場合に、地震応答を制御することを考える。

建物は 10 層（階高 4m、建物高さ 40m）で、各階の重量が 5000kN、剛性は建築基準法の Ai 分布の地震荷重で 1/200 となるように設定されている。構造減衰は 2%の剛性比例型減衰とする。建物の諸元を Table5 に示す。

Table 5 Parameters of the analytical model

Story	Height (m)	Weight $W_j=m_j\cdot g$ (kN)	Stiffness k_j (kN/m)	Natural damping coefficient c_j(h=0.02) (kN・sec/m)	Maxwell model: Stiffness $k_{d,j}$ (kN/m)	Maxwell model: Damping coefficient $c_{d,j}$ (kN・sec/m)
10	4.0	5000	103910	1090	-	-
9	4.0	5000	164980	1730	-	-
8	4.0	5000	215520	2260	-	-
7	4.0	5000	258600	2710	-	-
6	4.0	5000	295400	3100	-	-
5	4.0	5000	326520	3420	-	-
4	4.0	5000	352350	3690	-	-
3	4.0	5000	373100	3910	370790	33910
2	4.0	5000	388940	4080	370790	33910
1	4.0	5000	400000	4190	370790	33910

ダンパーは Maxwell 型のダンパーで、制約条件として配置階は 1～3 階とし、Maxwell モデルを構成する剛性と減衰の値も制約値とし、Table5 のとおり指定されているものとする。このときの固有値解析の結果を Table6 に、4 次モードまでの刺激関数を Fig.10 に示す。また、本検討では、建物の損傷を防ぐことを目標とし、建物構造は弾性とする。

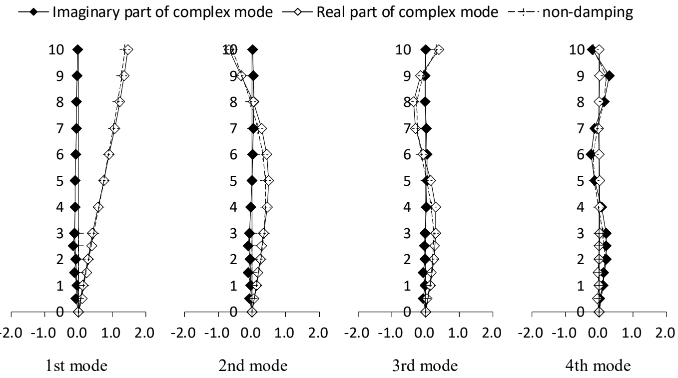


Fig.10 Mode shapes

Table 6 Results of complex eigenvalue analysis

Mode	Non-damping T_j^* (s)	Non-damping ω_j^* (1/s)	With Maxwell model Eqn.(48) T_j (s)	Eqn.(48) ω_j (1/s)	Eqn.(49) h_j	Exact (method1,2) T_j (s)	Exact ω_j (1/s)	Exact h_j
1	1.646	3.82	1.610	3.90	0.083	1.591	3.95	0.076
2	0.638	9.84	0.601	10.45	0.112	0.596	10.54	0.098
3	0.400	15.70	0.378	16.62	0.114	0.377	16.68	0.111
4	0.295	21.32	0.279	22.53	0.132	0.281	22.35	0.127
5	0.236	26.66	0.219	28.74	0.157	0.225	27.88	0.149
6	0.198	31.80	0.179	35.08	0.179	0.187	33.52	0.175
7	0.171	36.82	0.154	40.82	0.199	0.160	39.38	0.203
8	0.150	41.79	0.137	45.81	0.220	0.138	45.66	0.231
9	0.134	46.74	0.120	52.54	0.240	0.119	52.89	0.220
10	0.121	51.78	0.095	66.28	0.245	0.089	70.86	0.228
11	-	-	-	-	-	Eigenvalue= -5.43		
12	-	-	-	-	-	Eigenvalue= -5.55		
13	-	-	-	-	-	Eigenvalue= -7.18		

なお、Maxwell モデルの減衰係数は Fig.11 のようなバイリニアの減衰力特性を、文献 1 を参考に最大変位が等価となる線形モデルへ置き換えたものである。この際、最大変位となるときの速度は、振幅約 40㎜ で固有周期に相当する単振動時の最大速度とした。

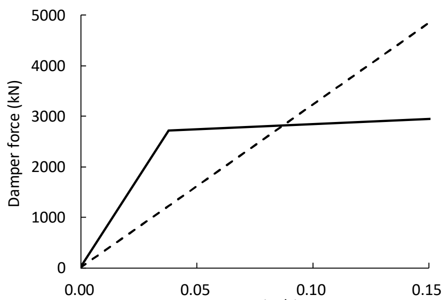


Fig.11 The relations of damper force and velocity

5.1 応答評価

建築センターLEVEL2(BCJ-L2)地震動を入力して応答解析（Newmark's β 法、β=0.25）を行った結果を Fig.12 に示す。なお、Maxwell モデルの減衰係数は Fig.11 のバイリニアとした。各層の変形角は上階で 1/100（40mm）を超える結果となっている。モーダルアナリシスの例として、複素固有値解析に適用される近接モードを考慮した連成効果を考慮した CCQC 法 [10] による評価を示す。

参考として、複素固有モードに対して非連成近似を仮定したCSRSS法[10]、および無減衰モードのSRSS法[2]の評価も示す。さらに、CCQC法では、1次、2次モードだけを考慮した結果も示す。SRSS法は、無減衰の刺激関数と、(48)、(49)式で求められる固有振動数と減衰定数における変位スペクトル値より算出している。

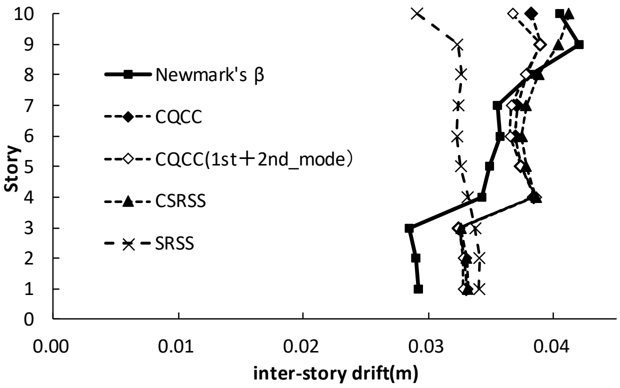


Fig.12 Comparison of seismic response estimation

振動解析結果とモーダルアナリシスとの結果の差異について検討する。Table7に各層の最大応答の発生時刻を示す。下層階では44.9秒付近、上層階では23.6秒付近となっている。ここで、1次、2次モードに対応する1質点の応答解析の変位時刻歴を調べる。

Fig.13に変位応答スペクトル、 Fig.14に変位時刻歴波形を示す。上層階が最大応答を示す23.6秒付近では、Fig.14b)に示すように1次モードと2次モードが逆位相で双方が比較的大きな値を示す状態となっている。これにより、モード重ね合わせの結果を上回っている。一方、下層階が最大応答を示す44.9秒付近では、Fig.14 c)に示すように1次モードが最大を示すが2次モードはほぼ0に近い値となり、1次モードのみの値となっている。これにより、モード重ね合わせの結果を下回っている。

Table 7 Time of occurrence of inter story drift

Story	Inter story drift (m)	Time of occurrence (s)
10	0.0404	23.5
9	0.0420	23.6
8	0.0383	23.6
7	0.0355	11.3
6	0.0357	16.8
5	0.0349	16.8
4	0.0343	44.9
3	0.0285	44.9
2	0.0290	44.9
1	0.0292	44.9

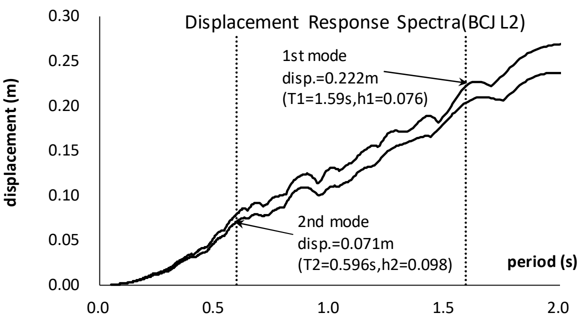
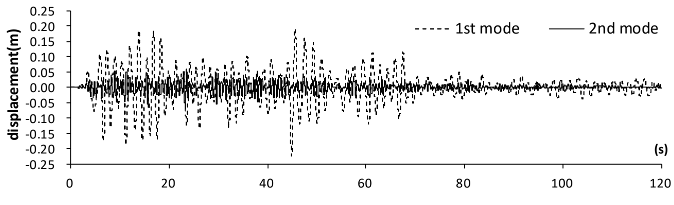
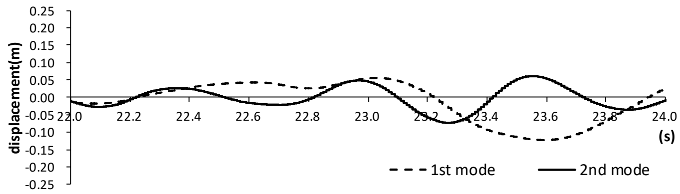


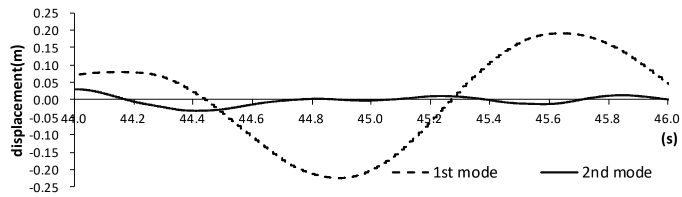
Fig.13 Displacement response spectra of BCJ_L2



a)　All time



b)　t=22.0～24.0(s)



c)　t=44.0～46.0(s)

Fig.14 Time histories of response displacement (BCJ_L2)

このように、地震応答解析は各次のモードの同時性に大きく影響を受ける。本解析例ではCCQC法やCSRSS法は上層階を除き包絡する結果となっている。また、1次、2次モードだけを考慮したCCQC法の評価と、全モードを考慮したCCQC法の評価との誤差は比較的小さい結果であり、低次モードのみを考慮する有効性が確認される。ただし、高層建物などで高次モードの影響が大きい場合や地震動のスペクトル特性や位相特性により、高次モードの影響が無視できない場合も考えられるので状況に応じ適切な対応が求められる。

一方、無減衰のモードで評価したSRSS法による結果は、応答結果との誤差が大きい。本解析ケースでは、下層に減衰が比較的多く配置され、下層階の変位が小さくなっているが、無減衰のモーダルアナリシスではこの影響を評価できないためである。減衰効果による建物変形の抑制効果を考慮出来ることも複素固有値解析を行うことにより得られる大きなメリットである。

5.2　剛性調整によるモード成分制御

ダンパーの設置階、減衰量が限定される場合に、建物の応答を制御するパラメータとしては、質量または剛性となる。質量は、床や壁などの使用材料の比重などで調整することは可能ではあるが、積載荷重の変動などもあり各階で微妙な調整は困難である。一方、剛性は柱、梁の断面の調整や高強度材料の採用で剛性を調整するなど、質量に比べ比較的調整が容易である。ここでは、各階の剛性を調整して地震応答を制御することを考える。

応答制御として、各階の最大層間変位の低減を目標とする。ここでは、各階の最大層間変形角を均等の値に制御することで建物の最大応答の低減を図る。これは、建物に入力されるエネルギーを、各階の減衰で吸収するものと考えると、各階が均等な変位でエネルギーを吸収することが、最大変形角を低減して効率よくエネルギー吸収できるものと考えられることによる。

各層の最大層間変形を制御するために、1 次モードの層間成分の比率を調整することを考える。(35)～(38)式では、未知数を各層のモード成分$Re\left[u_j^{(s)}\right]$、$\mathrm{Im}\left[u_j^{(s)}\right]$、$Re\left[u_{d,j}^{(s)}\right]$、$\mathrm{Im}\left[u_{d,j}^{(s)}\right]$とした。ここでは、各層のモード成分$Re\left[u_j^{(s)}\right]$を指定し、未知数を各階の建物剛性$k_j$とする。この際、固有振動数や減衰定数はもとのモデルの一次モードの値を用いる。厳密には建物剛性を変化させるので、固有振動数や減衰定数は異なるものとなるが、Fig.5 のグラフで見られるように、一般に一次モードでは、減衰の多少の変動では、極小値となる振動数に大きな差異が生じない。同様に$|u_0|^2-\omega$関係曲線では一次モード付近では高次モードに比べ緩やかな曲率の極小値状態を示し、固有周期の多少の変動でも$u_0^{(s)}$は 0 に近い値を示し、大きな誤差を生じないものと考えられる。また、Fig.8 の刺激関数を見ると分かるように減衰定数 0.1 程度では一次モードの虚数成分は 0 に近いか、実数成分と同様な各階の成分割合となっている。このことから、各階のモード成分は実数成分のみを指定し、虚数成分は最上層を 0 と指定する。

(35)～(38)式で建物剛性k_jを未知数として展開すると、下式の通り各階でk_jの 2 次方程式となる。

$${}_2p_{k,j}^{(1)}k_j^2+{}_1p_{k,j}^{(1)}k_j+{}_0p_{k,j}^{(1)}=0 \tag{56}$$

各係数は以下のようになる。

$${}_2p_{k,j}^{(1)}=Re\left[u_j^{(1)}-u_{j-1}^{(1)}\right] \tag{57}$$

$${}_1p_{k,j}^{(1)}=2a_{k,j}^{(1)}Re\left[u_j^{(1)}-u_{j-1}^{(1)}\right]+E_j^{(1)} \tag{58}$$

$${}_0p_{k,j}^{(1)}=\left({a_{k,j}^{(1)}}^2+{b_{k,j}^{(1)}}^2\right)Re\left[u_j^{(1)}-u_{j-1}^{(1)}\right]+a_{k,j}^{(1)}E_j^{(1)}+b_{k,j}^{(1)}F_j^{(1)} \tag{59}$$

ここで、

$$a_{k,j}^{(1)}=\xi^{(1)}c_j+\left(1-C_{d,j}^{(1)}\right)k_{d,j} \tag{60}$$

$$b_{k,j}^{(1)}=\eta^{(1)}c_j+D_{d,j}^{(1)}k_{d,j}\ \left(={}_2\beta_{d,j}^{(1)}\right) \tag{61}$$

$$E_j^{(1)}={}_1\gamma^{(1)}\sum_{l=j}^{n}m_l\cdot Re\left[u_l^{(1)}\right]-{}_2\gamma^{(1)}\sum_{l=j}^{n}m_l\cdot Im\left[u_l^{(1)}\right] \tag{62}$$

$$F_j^{(1)}={}_2\gamma^{(1)}\sum_{l=j}^{n}m_l\cdot Re\left[u_l^{(1)}\right]+{}_1\gamma^{(1)}\sum_{l=j}^{n}m_l\cdot Im\left[u_l^{(1)}\right] \tag{63}$$

である。$\xi^{(1)}$、$\eta^{(1)}$は(10)式、$C_{d,j}^{(1)}$、$D_{d,j}^{(1)}$は(41)、(42)式、${}_1\gamma^{(s)}$、${}_2\gamma^{(s)}$は(19)、(20)式による。

2 次方程式の解では正の解を採用するが、制振要素を設置した階で正の解が得られない場合は、制振要素が過剰と考えられ、制振要素を削除することで正の解が得られる。

一次モードの層間成分の指定として次の 2 つのケースを考える。

1）ケース A

一次モードの影響度の大きさを考慮して、一次モードの層間成分$Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]\left(\equiv Re\left[u_j^{(1)}-u_{j-1}^{(1)}\right]\right)$が各層で一定となるように設定する。

2）ケース B

高次モードの影響を考慮して、一次モードの各層の層間成分比率を調整する。ここでは、応答解析結果の各層の最大応答変位Δy_jを用い、一次モードの層間成分のノルム$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$との対応を考える。最大応答変位の平均値$ave_\Delta y_j$に対する各層変位の比の逆数を$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$にかけ$Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]$を指定する。指定する$sp_Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]$は下式のようになる。

$$sp\_Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]=\left(ave\_\Delta y_j/\Delta y_j\right)\left|\Delta u_j^{(1)}\right| \tag{64}$$

各ケースの剛性算出では制御前の固有周期、減衰定数、構造減衰を用いた。Table8、Fig15 に各ケースで各層に対して指定した$sp_Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]$と、(56)式から得られた各層の建物剛性$k_j$、およびそれを用いた複素固有値解析の結果より得られた各層のモード層間成分$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$を示す。なお、$sp_Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]$と$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$は各層の総和を 1 で正規化した値である。

$sp_Re\left[\Delta u_j^{(1)}\right]$と$\left|\Delta u_j^{(1)}\right|$は比較的よく一致しており、建物剛性$k_j$を調整することで一次モードが精度よく制御できていることが確認できる。制御後の一次モードの固有周期は変動が少ないが、減衰定数は大きくなっている。

ケース A、B の地震応答解析結果を Fig.16 に示す。ケース A では、1～7 階までは各層の層間変位がほぼ一定となっているが、5.1 節で調べたように、本解析では上層階で CCQC 法による応答評価を上回る程の高次モードの影響が大きく表れているため、一次モードの各層の成分を一定にするだけでは、地震応答の結果を制御できなかったものと考えられる。逆に上層階の剛性が下がったために、一次モードの変位が大きくなり、元の建物の応答を上回る結果となった。

一方、ケース B では、全層に渡り比較的層間変位が一定しており目標とする性能が実現されているものと考えられる。これは、高次モードの影響が含まれた振動解析の結果をもとに制御しているためであると考えられる。振動解析の代わりに CCQC 法や CSRSS 法の結果をもとに制御を行う場合も同様な結果が得られるものであり、振動解析によらずモーダルアナリシスのみでも一連のモード制御が可能である。

以上は、一つの建物の一つの地震応答による考察をもとに行ったモード制御の例である。高次モードの影響の大きい建物や、様々な性状を示す地震動に対する検討、および適用条件などは今後の課題である。

Table 8 Results of control of first mode

Story	Original building			Mode control in case A				Mode control in case B			
	k_j (kN/m)	Result of complex eigenvalue analysis		sp_ $Re[\Delta u_j^{(1)}]$	k_j by eq.(56) (kN/m)	Result of complex eigenvalue analysis		sp_ $Re[\Delta u_j^{(1)}]$	k_j by eq.(56) (kN/m)	Result of complex eigenvalue analysis	
		$\lvert\Delta u_j^{(1)}\rvert$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$			$\lvert\Delta u_j^{(1)}\rvert$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$			$\lvert\Delta u_j^{(1)}\rvert$	$T^{(1)}$, $h^{(1)}$
10	103910	0.076		0.100	79360	0.099		0.064	123620	0.063	
9	164980	0.092	$T^{(1)}=$	0.100	150690	0.099	$T^{(1)}=$	0.075	205280	0.074	$T^{(1)}=$
8	215520	0.101	1.591	0.100	214150	0.099	1.593	0.090	246540	0.089	1.596
7	258600	0.106	(s)	0.100	269790	0.099	(s)	0.102	277250	0.101	(s)
6	295400	0.110		0.100	317610	0.099		0.105	321130	0.103	
5	326520	0.112	$h^{(1)}=$	0.100	357600	0.099	$h^{(1)}=$	0.109	350070	0.107	$h^{(1)}=$
4	352350	0.112	0.076	0.100	389770	0.099	0.085	0.112	373820	0.110	0.097
3	373100	0.097		0.100	341420	0.102		0.116	306580	0.120	
2	388940	0.097		0.100	358560	0.102		0.114	330700	0.118	
1	400000	0.097		0.100	367020	0.102		0.113	345760	0.116	

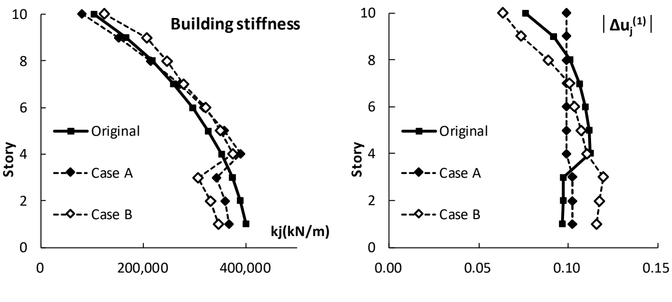


Fig.15 Results of control of first mode

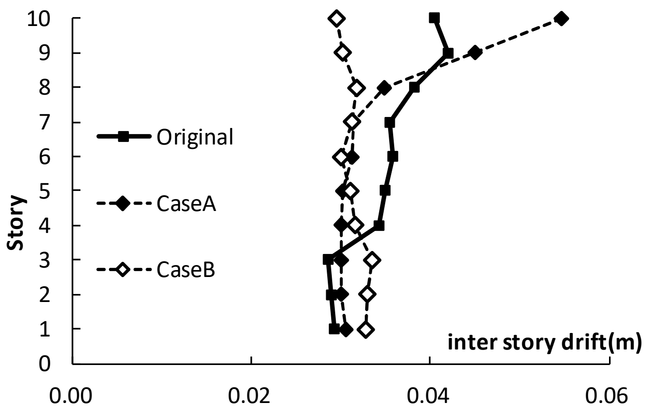


Fig.16 Results of control of first mode

6．まとめ

本論では、設計初期段階などで建物の振動性状を把握するために、複素固有値の結果をモーダルアナリシスに適用し、耐震性能を把握するための一連の手法について検討した。

本論で提示した複素固有値解析の手法は、Holzer 法に基づいたものである。これまで Holzer 法の適用は節点間を減衰要素で直接接続するものに限定されていたが、制振構造の減衰のモデル化で必須とされる Maxwell モデルや、同類型の同調粘性マスダンパーについての算出方法も示した。

モーダルアナリシスの検討では、通常低次モードの考慮で十分である。これに基づき、低次モードの複素固有値解析を表計算で行う簡易な計算方法（手法２）を提示した。

本来、解析式を複素数で構成し、解を複素数として求めることは表現が簡潔になり、演算が容易になるなどの利点があるが、本論では表計算プログラムでの適用の便宜を図り、実数計算に置き換えたものとしている。これらの定式化から、構造のパラメータの構成を容易に把握することができる。この応用として１次モードの各層の実数部を指定して各層の剛性を調整することにより、層間変位を制御する方法を提示した。この方法を耐震性能向上への応用として適用し、数値計算例を行い有効性の確認を行った。ただし、検討例は限定されており、適用条件等について、今後の検討が必要である。

本論の提示した手法や計算例は､基本的な振動性状の理解を深め、より自由度の高い制振構造の計画を行う上で有効であるものと考えられ、また、より効率的な構造計画への応用が期待される。

参考文献

1）Japanese Society of Seismic Isolation: Passive seismic response control structure design and construction manual, 2005 (in Japanese)
日本免震構造協会:パッシブ制振構造設計・施工マニュアル編集委員, 2005

2）Shibata, A.: Latest Earthquake-resistant Structural Analysis, Morikita Publishing Co. Ltd., 1981 (in Japanese)
柴田明徳：最新耐震構造解析、森北出版、1981

3）Tajimi, H.: Building Vibration Theory, Corona Publishing Co. Ltd., 1965 (in Japanese)
田治見宏：建築振動学、コロナ社、1965

4）Ishimaru, S.: Introduction of Seismic Response Control Design, Shokokusya Publishing Co. Ltd., 2004 (in Japanese)
石丸辰治：応答性能に基づく「対震設計」入門、彰国社、2004

5）Thomson,T.W.：Theory of vibration with applications、CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.、1990

6）Clough, R. W. and Penzien, J.：Dynamics of Structures, Kagaku-Gijyutsu Publishing Co. Ltd., 1978 (in Japanese)
Clough, R. W. and Penzien, J.：構造物の動的解析、科学技術出版社、1978

7）Ishiyama, Y. ：Seismic Code and Structural Dynamics、Sanwa Syoseki Publishing Co. Ltd., 2008 (in Japanese)
石山祐二：耐震規定と構造動力学、三和書籍、2008

8）Inoue, N. and Ikago, K.: Displacement Control Design of Building, Maruzen Publishing Co. Ltd., 2012 (in Japanese)
井上範夫, 五十子幸樹：建築物の変位制御設計、丸善出版、2012

9）Shinjo, T. and Ikenaga, M. and Ikago, K. and Inoue, N.: Optimum response control of Multi-degree-of-freedom seismic control system incorporated with concentratedly arranged tuned viscous mass dampers, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No.715, pp1393-1402, 2015.9(in Japanese)
新城季樹, 池永昌容, 五十子幸樹, 井上範夫:集中配置時における多質点系同調粘性マスダンパー制振システムの最適応答制御, 日本建築学会構造系論文集, 715, pp1393-1402, 2015.9

10）Zhou, X. and Yu, R. and Dong, L.：The complex-complete-quadratic-combination (CCQC) method for seismic responses of non-classically damped system，13th World Conference on Earthquake Engineering, No.848, 2004

11）Ohnishi, H.: Mathematics in Solving Problem, NHK Publishing Co. Ltd., 2013 (in Japanese)
大西仁：問題解決の数理、NHK 出版、2013

12）Suzuki, M.: Complex eigenvalue analysis using Holzer method, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of japan, Structures-Ⅱ, pp.303-304,　2016 (in Japanese)
鈴木光雄：Holzer 法を用いた実数値計算による複素固有値解析法、日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造Ⅱ, pp.303-304,2016

付録１　ニュートン法の適用について

$f(\omega,h)\equiv|u_0|^2$として本検討におけるニュートン法の手順を説明する。まず、ωを固定してhを変動させる。$\bar{h}$を初期値としてニュートン法を適用すると、更新する$\bar{\bar{h}}$は下式の通りとなる[11)]。

$$\bar{\bar{h}}=\bar{h}-\left(\partial f(\omega,\bar{h})/\partial h\right)/\left(\partial^2 f(\omega,\bar{h})/\partial^2 h\right) \tag{A1.1}$$

偏微分項については、本検討では微小なΔhを設定し、$h_1=\bar{h}-\Delta h$、$h_2=\bar{h}+\Delta h$として下式で求めた。

$$\partial f(\omega,\bar{h})/\partial h\cong\{f(\omega,h_2)-f(\omega,h_1)\}/2\Delta h \tag{A1.2}$$

$$\partial^2 f(\omega,\bar{h})/\partial^2 h\cong\left\{f(\omega,h_2)+f(\omega,h_1)-2f(\omega,\bar{h})\right\}/\Delta h^2 \tag{A1.3}$$

$\bar{\bar{h}}$を$\bar{h}$と置き換え計算を繰り返し、$|\bar{\bar{h}}-\bar{h}|$が十分に小さくなれば、次に、hを固定してωを変動させる。以降、hとωについて交互に同様の計算を行う。この間、収束判定条件を確認し、$|u_0^{(s)}|^2/\sum_{l=1}^{n}|u_l^{(s)}|^2<1.0\times10^{-10}$の時点で精算値が得られたものとみなす。また、本検討では$\Delta h=0.01\times|\bar{\bar{h}}-\bar{h}|$、$\Delta\omega=0.01\times|\bar{\bar{\omega}}-\bar{\omega}|$とした。なお、上記で$h$および$\omega$を変動させる場合は、それぞれ$|u_0|^2-h$曲線、$|u_0|^2-\omega$曲線の極小値探索問題に対応する。

付録２　モード刺激関数[2)]

モード刺激関数は複素固有ベクトル$\mathbf{u}^{(s)}$と刺激係数$\beta^{(s)}$から$\beta^{(s)}\mathbf{u}^{(s)}$となる。$\beta^{(s)}$を下式に示す（右下添え字$d$符号付き変数は４章参照）。

$$\beta^{(s)}=\frac{\sum_{l=1}^{n}m_l u_l^{(s)}+\sum_{l=1}^{n_d}m_{d,l}u_{d,l}^{(s)}}{\sum_{l=1}^{n}m_l\left|u_l^{(s)}\right|^2+\sum_{l=1}^{n_d}m_{d,l}\left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2}\cdot\frac{1}{1+(\varepsilon^{(s)}-\varepsilon'^{(s)})i} \tag{A2.1}$$

$$\varepsilon^{(s)}=h^{(s)}/\sqrt{1-{h^{(s)}}^2} \tag{A2.2}$$

$$\varepsilon'^{(s)}=\frac{\sum_{l=1}^{n}c_l\left|u_l^{(s)}-u_{l-1}^{(s)}\right|^2+\sum_{l=1}^{n_d}c_{d,l}\left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2}{2\sqrt{1-{h^{(s)}}^2}\,\omega^{(s)}\left(\sum_{l=1}^{n}m_l\left|u_l^{(s)}\right|^2+\sum_{l=1}^{n_d}m_{d,l}\left|u_{d,l}^{(s)}\right|^2\right)} \tag{A2.3}$$

複素固有ベクトルの成分$u_l^{(s)}$、$u_{d,l}^{(s)}$は複素数であり、刺激係数算出は複素計算となるが、四則演算であり表計算プログラムの機能で対応可能である。

付録 3　初期値$\omega^{(s)}$のシフトについて

$Step0$で設定するs次モードの$\omega^{(s)}$の近似値を$\omega^{(s)'}$とし、繰り返し計算で設定する$\omega^{(s)}$の初期値を$\omega^{(s)}|_0$とすると、通常の解析手順では、

$$\omega^{(s)}|_0 = \omega^{(s)'} \tag{A3.1}$$

となる。この設定で、求める$\omega^{(s)}$に収束しない場合、下記のように初期値をシフトさせて解析した。

$$\begin{aligned} \omega^{(s)}|_0 &= \omega^{(s)'} + 0.01 \cdot itr\left(\omega^{(s-1)'} - \omega^{(s)'}\right) \quad , \ itr = 1\sim 99 \\ \omega^{(s)}|_0 &= \omega^{(s)'} + 0.01 \cdot itr\left(\omega^{(s+1)'} - \omega^{(s)'}\right) \quad , \ itr = 1\sim 99 \end{aligned} \tag{A3.2}$$

上式は隣接する次数の近似固有周期の間を 0.01 倍で刻み設定したもので、$s = 1$、$s = n$の場合は、下式の通りとしている。

$$\begin{aligned} \omega^{(s-1)'} &= 2\omega^{(s)'} - \omega^{(s+1)'}, \ \ s{=}1 \\ \omega^{(s+1)'} &= 2\omega^{(s)'} - \omega^{(s-1)'}, \ \ s{=}\mathrm{n} \end{aligned} \tag{A3.3}$$

付録 4　Maxwell モデルの実数固有値の算出概要

n_d個の実数の固有値については、以下のように算出する。

これまでに示した複素固有値に対する手法を一貫して適用するために、実数の固有値$\lambda^{(s)}$に対し、便宜的に減衰定数$h^{(s)}$=1 と仮定して$\xi^{(s)}$、 $\eta^{(s)}$を$\xi^{(s)} = -\omega^{(s)}$, $\eta^{(s)} = 0$と設定する。このとき、$\lambda^{(s)} = -\omega^{(s)}$と表される。固有値と固有モードを実数とすると、(35)、(37)式は下式の通りとなる。

$$Re\left[u_{j-1}^{(s)}\right] = Re\left[u_j^{(s)}\right] + A_{d,j}^{(s)} \sum_{l=j}^{n} m_l \cdot Re\left[u_l^{(s)}\right] \tag{A4.1}$$

$$Re\left[u_{d,j}^{(s)}\right] = C_{d,j}^{(s)} \cdot Re\left[u_j^{(s)} - u_{j-1}^{(s)}\right] \tag{A4.2}$$

便宜的に$\omega = -\lambda$としたu_0とωの関係について、4.6 節の設定を例にして Fig.A4 に示す。この図中の二点鎖線が固有値に対応する。この関係図をもとに、無減衰の場合の固有振動数算出に(7)式を適用したのと同様に、固有値算出を行えばよい。なお、図中の点線は漸近線を示し、漸近線に対応する$\lambda(=-\omega)$は(A4.3)式を解くことにより求められる。この位置を把握しておくと、固有値算出の見通しが良くなる。(A4.3)式は、n_d個立式され、二次方程式であることから一般に$2n_d$個の解が得られる。本例では$c_j = 0$であり一次式となるため 3 個の解($n_d = 3$)となり、Fig.A4 では 3 本の漸近線が示されている。

$$c_j c_{d,j} \lambda^2 + \left(c_j k_{d,j} + k_j c_{d,j} + k_{d,j} c_{d,j}\right)\lambda + k_j k_{d,j} = 0 \tag{A4.3}$$

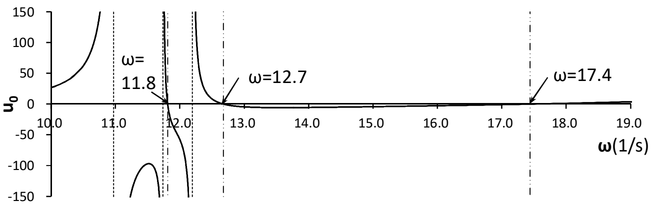
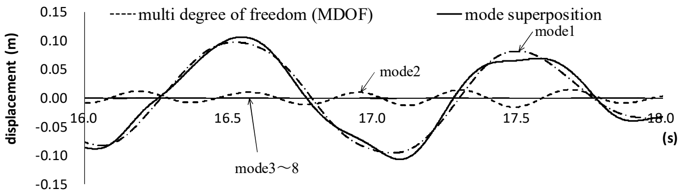


Fig.A4 The relations of u_0 and ω in real number eigenvalues of Maxwell model

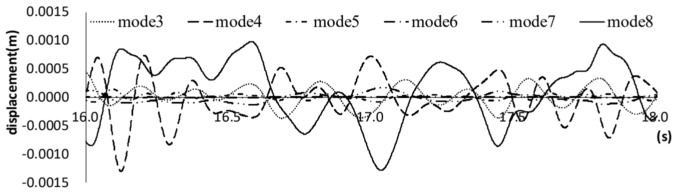
付録 5　Maxwell モデルの実数固有値モードの応答について

モードの重ね合わせによる応答解析では、各次のモードの固有周期と減衰定数を有する一質点の応答値に刺激関数を乗じて足し合わせることにより評価される。ここで、共役成分を持たない単独の実数固有値について考察する。このモードの影響は、モード解析の立場から、減衰定数を 1.0 と仮定し、$\omega = -\lambda$として固有振動数を求めた一質点の応答と刺激係数を乗じることにより、形式的に評価することができる。

ここで、4.6 節の Maxwell モデル減衰を設置した建物の建築センターLEVEL2(BCJ-L2)に対する応答を検討する。8 次モードで比較的刺激関数の大きい本体構造の 3FL の変位について、最大応答値付近の t=16～18(s)の時刻歴波形（Newmark'sβ 法、β=0.25）を Fig.A5(a)に示す。多質点モデルの応答解析結果とモーダルアナリシスの結果は、ほぼ一致しグラフが重なっている。3～8 次モードの影響を確認するために、縦軸を拡大したグラフを Fig.A5(b)に示す。本解析では、3～8 次モード中で 8 次モードは比較的大きな影響を示すが、全体の応答に占める割合は小さい。減衰定数 1.0 に対応することを考慮すると、一般的にも影響度は低いものと考えられる。



(a)　MDOF, mode superposition and all modes



(b)　Mode3～8

Fig.A5 Time histories of response displacement on the 3rd floor (BCJ_L2)